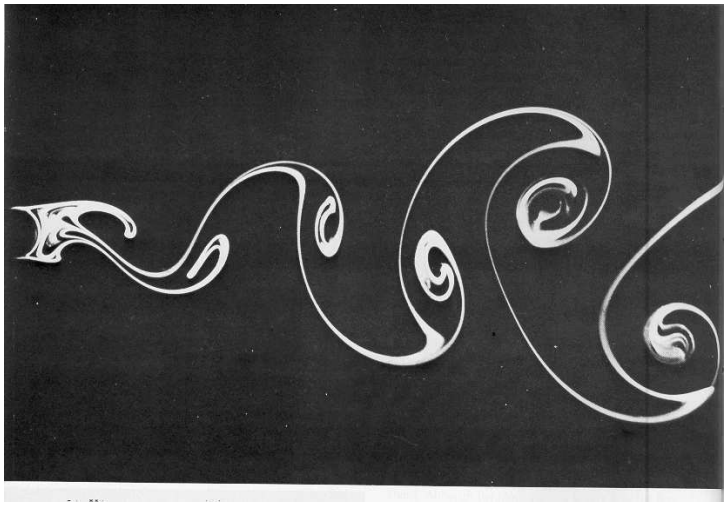
MECANIQUE DES FLUIDES

Master 1 GDP

Ph. Marty
2012-13



Allée de Karman derrière un cylindre (d'après Van Dyke: An album of fluid motion)

GÉNIE DES PROCÉDÉS
Master 1
Université Joseph Fourier, Grenoble

version 29 Aout 2012
Philippe.Marty@legi.grenoble-inp.fr

Contents

1 Rappels **2**
- 1.1 Propriétés des fluides et quantités physiques nécessaires à leur étude . . . 2
- 1.2 Rappels d'hydrostatique . . . 2
- 1.3 Poussée d'Archimède . . . 3
- 1.4 Rappels d'hydraulique . . . 3
- 1.5 Rappels sur les machines hydrauliques . . . 4
- 1.6 Notions de cinématique . . . 9

2 Ecoulements de fluides parfaits **11**
- 2.1 Définition d'un fluide parfait . . . 11
- 2.2 Rappel de la Relation Fondamentale de la Dynamique . . . 11
- 2.3 Equation d'Euler . . . 11
- 2.4 Conservation de la matière . . . 14

3 Bilans de matière et d'énergie dans un écoulement **15**
- 3.1 Bilan de matière . . . 15
- 3.2 Bilan de quantité de mouvement . . . 18

4 Dynamique des fluides visqueux **22**
- 4.1 Expérience de Couette . . . 22
- 4.2 Equations de Navier-Stokes . . . 24
- 4.3 Les conditions aux limites . . . 26
- 4.4 Viscosité des fluides non-Newtoniens . . . 27

5 Ecoulements en conduites et canaux **29**
- 5.1 Ecoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux plans parallèles . . . 29
- 5.2 Ecoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique . . . 31
- 5.3 Ecoulement de Couette cylindrique . . . 33

6 Ecoulements sur paroi et autour d'obstacles **34**
- 6.1 Ecoulement sur plaque plane . . . 34
  - 6.1.1 Notion de couche limite . . . 34
  - 6.1.2 Coefficient de frottement sur plaque plane . . . 36
- 6.2 Ecoulement autour d'obstacles . . . 39
  - 6.2.1 Traînée et portance . . . 39
  - 6.2.2 Décollement des couches limites . . . 39
  - 6.2.3 Ecoulement autour d'un cylindre pour divers Re. . . . 39
  - 6.2.4 Ecoulement autour d'obstacles quelconques . . . 41

7 Exercices **44**

Chapter 1

Rappels

Ce cours fait suite au cours de Mécanique des Fluides de l'année L3-GSI. Ce premier chapitre vise donc à rappeler quelques principes importants qui pourront être nécessaires par la suite.

1.1 Propriétés des fluides et quantités physiques nécessaires à leur étude

Définition d'un fluide : on appelle fluide un corps qui s'écoule : liquide, gaz, mais aussi des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Un fluide se caractérise par un certain nombre de grandeurs qui le caractérisent tels que sa densité, sa viscosité, etc

- masse volumique : s'exprime en kg/m^3.
- densité : elle mesure le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à celle de l'eau : sans unité.
- viscosité cinématique et dynamique : la viscosité cinématique ν est homogène à une diffusivité (m^2/s). La viscosité dynamique μ est le produit de la précédente par la masse volumique:$\mu = \rho\nu$ (en $Pa.s$).
- pression : se mesure en Pascal.
- Vitesse : en m/s
- Accélération : en m/s^2
- Contrainte : homogène à une pression (Pa ou N/m^2)).

1.2 Rappels d'hydrostatique

On appelle hydrostatique un problème caractérisé par un fluide au repos. La vitesse est donc nulle en tout point soit :$\vec{V} = 0$. Nous allons donc considérer un fluide au repos soumis à un champ de force $\vec{f}$ par unité de volume et exprimer la relation qui lie le champ de pression au champ de force. Après intégration, cette relation locale donnera la valeur du champ de pression en tout point du fluide.
On rappelle d'abord que pour un élément de surface dS appartenant à une surface fermée S entourant un volume de contrôle, la force de pression que ressent dS est dirigée (par convention) dans le sens opposé à sa normale extérieure, soit:

$$d\vec{f}_P = -p\ \vec{n}.dS$$

Ceci traduit le fait que les forces externes de pression ont tendance à repousser la surface vers l'intérieur du volume qu'elle enferme. Pour une surface finie S, la résultante des forces de pression s'écrira donc:

$$-\int\int_S p\ \vec{n}dS$$

Considérons maintenant l'équilibre d'un volume élémentaire de fluide $dx.dy.dz$ au repos et soumis à un champ de force $(f_x; f_y; f_z)$ (cf. Figure 1.1):
La somme des forces auxquelles il est soumis vaut 0 de sorte que l'on peut écrire:

$$\vec{f} - \vec{grad}\ p = 0$$

.

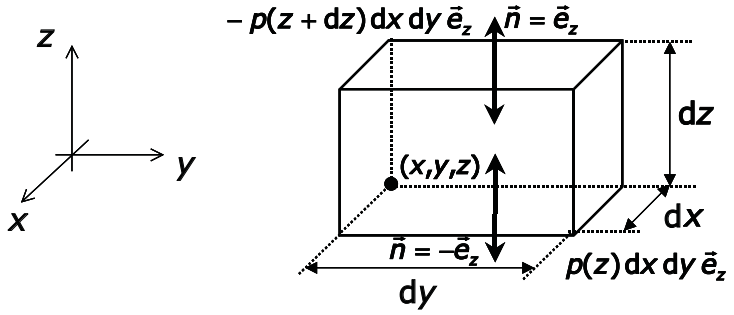


Figure 1.1: Volume elementaire $dx.dy.dz$

Cette expression est homogène à des $N.m^{-3}$ et fournit l'occasion de rappeler la définition d'un gradient:
le gradient est un opérateur qui s'applique à une grandeur scalaire (la température, la masse volumique, etc...) ; il traduit l'intensité des variations spatiales de cette grandeur. En coordonnées cartésiennes, il s'écrit:

$$\vec{grad}\ f \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$$

L'opérateur $\vec{grad}$ se note aussi $\vec{\nabla}$: ainsi, $\vec{\nabla} p$ signifie $\vec{grad}\ p$.
En coordonnées cylindriques, l'opérateur gradient est défini ainsi:

$$\vec{grad}\ f \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$$

Lorsque le champ de force $\vec{f}$ se limite à la gravité (soit $f_z = -\rho g$ si on oriente l'axe Oz vers le haut) on en déduit par projection selon Oz : $-\rho g\ - \frac{dp}{dz} = 0$ d'où l'on tire:

$$p + \rho g z = Cste$$

Exemple 1: Force sur une paroi verticale

Exemple 2 : Force sur une paroi inclinée

1.3 Poussée d'Archimède

C'est la poussée que ressent un corps lorsqu'il est immergé dans un fluide. Cette force intervient à l'arrêt (bateau ou baigneur immobile) mais aussi en mouvement (une gouttelette d'eau qui tombe dans l'air est soumise à son poids, aux forces de traînée mais aussi à la poussée d'Archimède).
Enoncé : la poussée d'Archimède est égale au poids du volume fluide déplacé.

Lorsqu'on étudie une situation dans laquelle la poussée d'Archimède intervient, il faut écrire l'équilibre des forces (la somme des forces sur un corps vaut 0 que ce soit un corps immobile -cf. Exemple 1- ou un corps de vitesse constante c.a.d. d'accélération nulle cf. Exemple 2).

Exemple 1 : calcul de la position d'un iceberg d'eau douce dans l'eau salée
Exemple 2: calcul de la vitesse limite de chute d'une sphère dans un fluide (viscosimètre à chute)

1.4 Rappels d'hydraulique

Théorème de Bernoulli : Ce théorème exprime le fait que l'énergie d'un fluide peut se transformer de 3 façons : en pression, en énergie potentielle ou encore en énergie cinétique:

Si le fluide est parfait (cas idéal d'une viscosité nulle) ce théorème exprime que la somme de ces 3 formes d'énergie reste constante le long d'une ligne de courant , soit:

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = Cste$$

Une autre forme, obtenue après division par ρg permet d'exprimer la charge H :

$$H = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = Cste$$

qui s'exprime donc en *metre*.

Dans la pratique, la viscosité du fluide est responsable de pertes d'énergie de sorte que la charge H s'épuise, et donc diminue, au fur et à mesure que le fluide avance dans les conduites. On distingue 2 types de pertes de charge:

- Les pertes de charges régulières qui traduisent la perte d'énergie lorsque le fluide avance dans une conduite de diamètre constant. Ces pertes sont donc proportionnelles à la longueur de la conduite. On montre qu'elles s'écrivent:

  $$\Delta H_{reg} = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{V_d^2}{2g}$$

  Dans cette expression:
  D_h est le diamètre hydraulique défini par $D_h = \frac{4S}{P}$ où Sest la section de passage du fluide et P le périmètre mouillé.
  V_d est la vitesse débitante, rapport du débit volumique à la section S. λ est le coefficient de perte de charge donné par les abaques (voir par exemple l'abaque de Moody Figure 1.2). Ce coefficient n'est fonction que du nombre de Reynolds $Re = \frac{V_d D_h}{\nu}$ et de la rugosité relative $k = \frac{\epsilon}{D_h}$ où ϵ désigne la hauteur (en m) des aspérités.

- Les pertes de charge singulières qui traduisent les pertes d'énergie dans les accidents de canalisation (Té, coude, convergent, divergent, clapet, vanne, débitmètre, crépine, etc). Chaque perte de charge est caractérisée par un coefficient K à lire dans une table adaptée au type de perte de charge considéré. La perte de charge s'exprime alors :

  $$\Delta H_{sing} = K \frac{V_d^2}{2g}$$

1.5 Rappels sur les machines hydrauliques

Cette section vise à rappeler la façon dont on peut prévoir le débit d'une installation comportant une machine hydraulique (pompe ou turbine) donnée, ou , de façon similaire, rappeler la façon dont on choisit une machine hydraulique lorsqu'on veut faire circuler un certain débit fixé par le cahier des charges du projet par exemple.

On ne considérera dans ce chapitre que deux types de machines hydrauliques:

- Les pompes : une pompe, comme tout convertisseur d'énergie, possède une caractéristique propre qui est donnée par le fournisseur. Cette caractéristique lie la charge H fournie par la pompe au débit volumique Q qu'elle fera circuler. Pour la plupart des pompes, et notamment les pompes centrifuges, la caractéristique $H - Q$ est une courbe décroissante du fait que la charge que peut vaincre la pompe diminue lorsque le débit augmente. Cette courbe est l'analogue de la courbe Tension-Courant d'une pile et a donc globalement la même forme.

  Pour chaque pompe cette courbe dépend des paramètres suivants :
  - La vitesse de rotation de la pompe : lorsqu'on augmente la vitesse de rotation d'une pompe, le débit et la charge augmentent de sorte que la caractéristique $H - Q$ se transforme en glissant vers la droite mais aussi vers le haut (Cf. figure 1.3)
  - Le diamètre de la turbine : sur un même corps de pompe , on peut monter plusieurs types de turbines de diamètres différents. La figure 1.4 montre un exemple de caractéristique d'une pompe GEC ALSTOM KID P 250-525 : on y voit l'évolution de la caractéristique pour des diamètres de roue allant de 434 mm à 532 mm. Cette figure montre aussi l'évolution du rendement dont les isovaleurs forment ce que l'on appelle les collines de rendement Ce rendement est le apport de la puissance mécanique transmise au fluide sur la puissance mécanique reçue par l'arbre de la pompe soit:

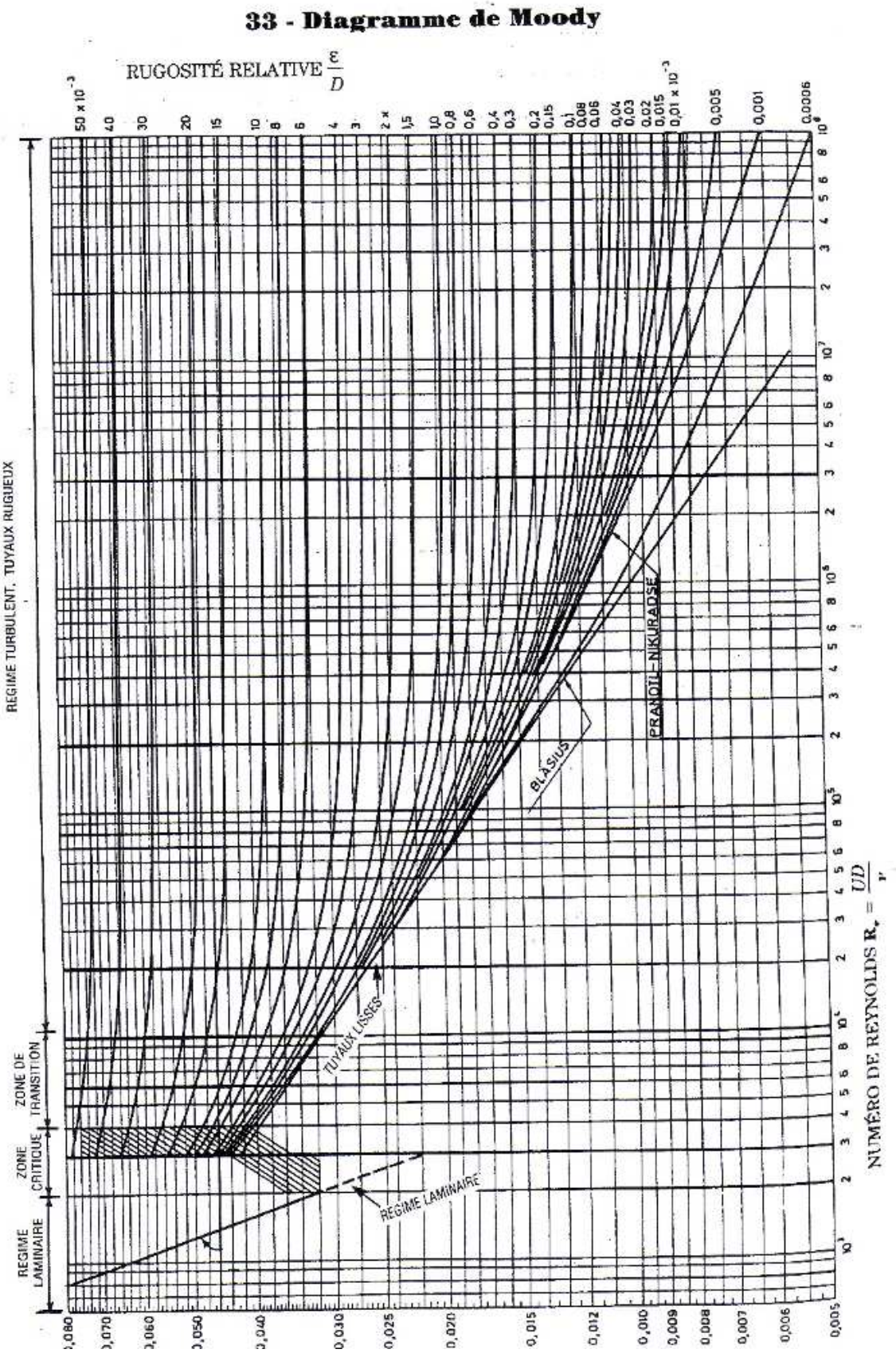


Figure 1.2: Abaque de Moody

$$\eta = \frac{P_{hyd}}{P_{arbre}} = \frac{Q\rho gH}{C\Omega}$$

Les courbes d'iso-puissance sur l'arbre figurent elles aussi sur la Figure mais sont en fait superflues puisse que la connaissance de H, Q, et η suffit à calculer la puissance. Enfin, la figure 1.4 indique la charge minimale que l'on doit respecter à l'aspiration de la pompe si on veut éviter la cavitation. Cette charge se nomme le NPSH (pour Net Pressure Succion Head). Par exemple, avec de l'eau et pour un débit de $1000m^3/h$ on lit un NPSH de $6m$ ce qui signifie que la pression à l'aspiration ne doit pas être inférieure à $0,6bar$.
L'utilisation des pompes est très répandue dans toutes les industries mais il est quand même possible de classer leur utilisation en deux types:
1: le fluide circule en circuit fermé (boucle de circulation pour chauffage, pour réaction chimique, filtration etc...
2: le fluide est transvasé d'un bassin à un autre, généralement plus élevé : la pompe fonctionne en pompe de relevage

- Les turbines : ce sont des récepteurs qui convertissent l'énergie hydraulique en énergie mécanique de rotation, alimentant ensuite un alternateur pour faire du courant ou, mais c'est maintenant rare, un moulin ou une scierie. Cette fois, plus le débit qui circule dans la turbine est grand et plus la charge prélevée à l'écoulement sera grande : on a une courbe caractéristique $H - Q$ croissante qui part de l'origine (cf. Figure 1.5). Dans une turbine, la vitesse de rotation n'est pas imposée comme dans une pompe : cela constitue une différence importante. La vitesse se calcule en écrivant l'égalité entre la puissance fournie par l'arbre de la turbine et la puissance absorbée par la charge de cette turbine , soit:

$$P_{arbre} = C\Omega = \eta_{turbine}.\rho gQH$$

.

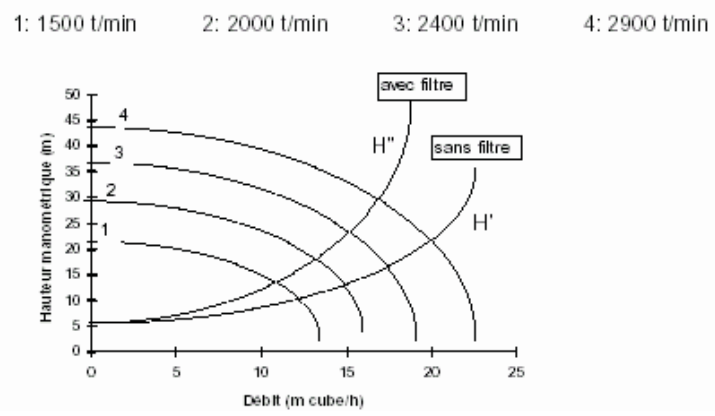


Figure 1.3: Courbe caractéristique d'une pompe centrifuge :effet de la vitesse de rotation

Calcul du point de fonctionnement d'une pompe Deux cas très distincts se présentent:
Cas 1: on connaît le débit de la pompe car on l'a mesuré (débitmètre ou autre méthode): par simple lecture sur la caractéristique de la pompe (voir par exemple figure 1.4) on en déduit la charge de la pompe et son rendement, la puissance mécanique fournie au circuit hydraulique etc...
Cas 2 : on ne connaît pas le point de fonctionnement (cas le plus fréquent) : on doit tracer la caractéristique du circuit et trouver graphiquement le point de fonctionnement. La caractéristique du circuit donne, à partir des éléments du circuits , et indépendamment de la pompe, la valeur de la perte de charge (exprimée en mètres) à fournir en fonction du débit. Cette courbe est donc aussi une courbe $H - Q$ dont l'intersection avec la caractéristique est le seul point de fonctionnement possible.
Considérons la Figure 1.6 : la courbe 1 représente la caractéristique de la pompe. Imaginons qu'elle soit branchée sur un circuit fermé dont la caractéristique est donné par la courbe 2, globalement parabolique d'équation $H = K.Q^2$: le point de fonctionnement sera le point A. Imaginons que l'on trouve le débit Q_A trop grand : après ajout d'une perte de charge dans le circuit (fermeture plus marquée d'une vanne par exemple) la nouvelle caractéristique sera la coube 3 dont l'intersection avec la courbe 1 en B donne un débit Q_B inférieur à Q_A. Si le circuit de cette pompe est un circuit de relevage, la caractéristique sera telle que la courbe 4 qui pour $Q = 0$ représente la hauteur de fluide à remonter et le point de fonctionnement sera en C.

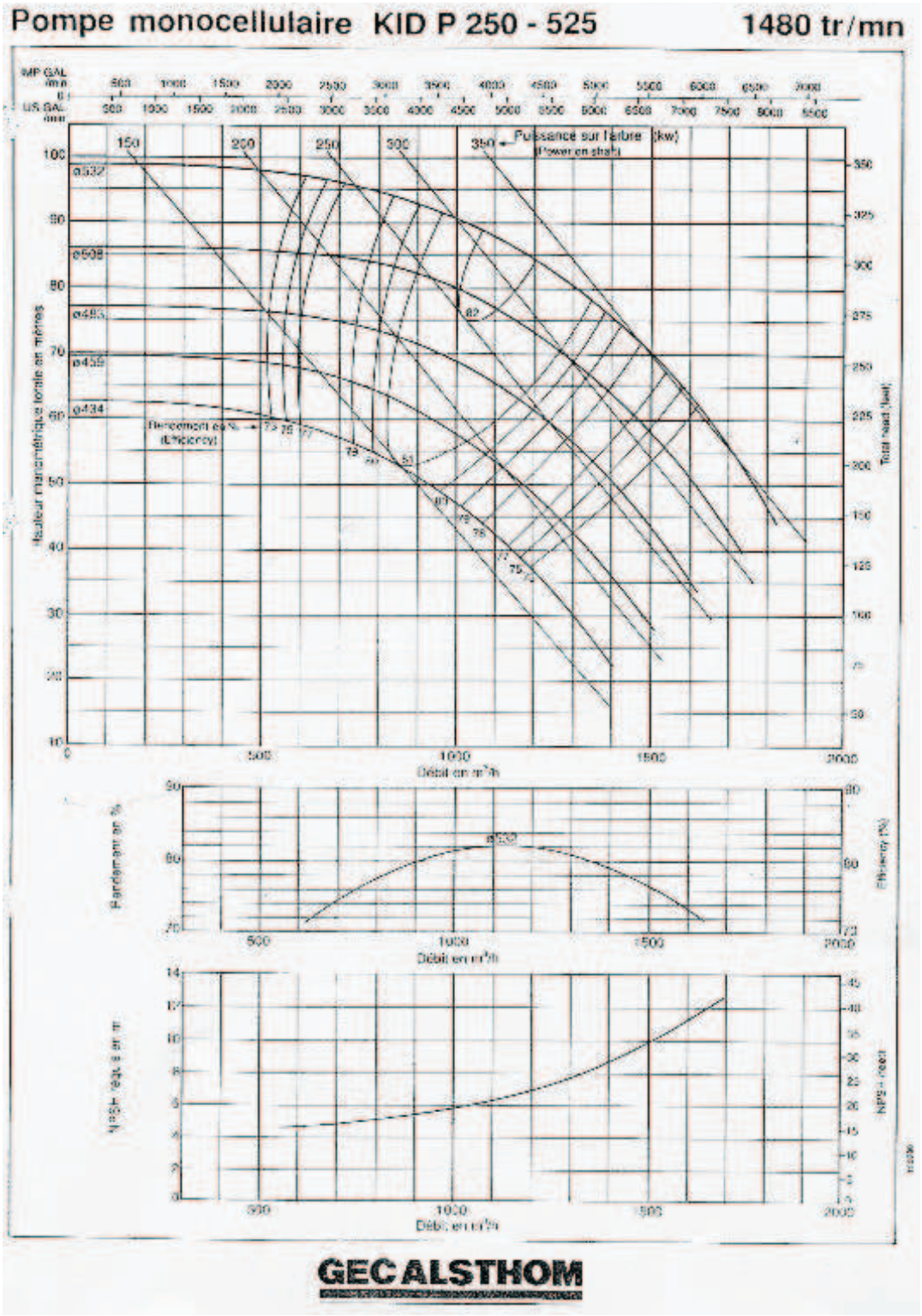


Figure 1.4: Courbe caractéristique d'une pompe centrifuge ALSTOM

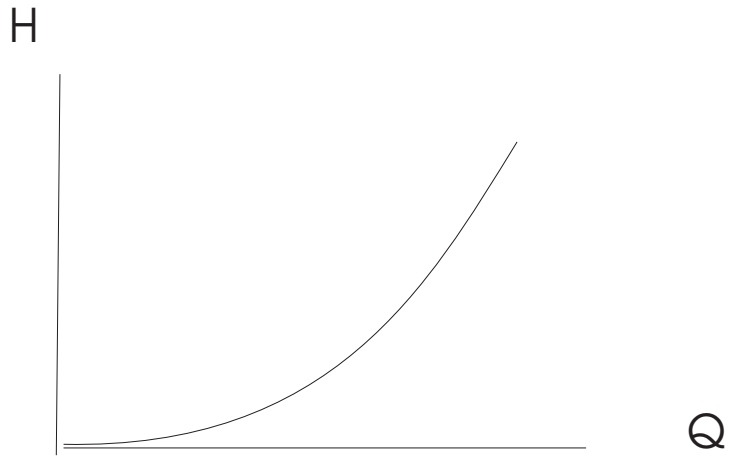


Figure 1.5: Courbe caractéristique d'une turbine

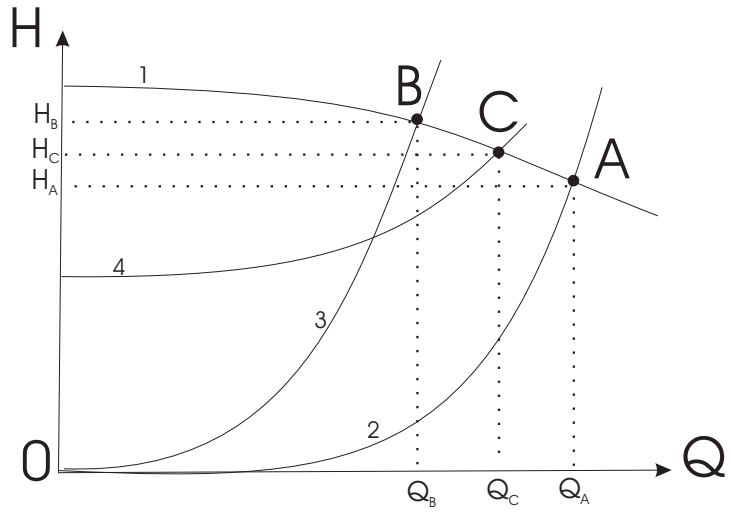


Figure 1.6: Détermination graphique du point de fonctionnement d'une pompe

1.6 Notions de cinématique

Nous rappellerons dans cette partie les notions de cinématique vues en L3. Choisissons une particule fluide comme entité élémentaire (une particule fluide est un ensemble de molécules entourant un point M donné et supposées avoir la même vitesse à un instant donné).

Nous allons voir que l'écoulement peut être décrit selon deux points de vue très différents.

Descriptions d'Euler et de Lagrange

La description d'Euler consiste à établir à un instant donné, l'ensemble des vitesses associées à chaque point du fluide (Figure 1.7).

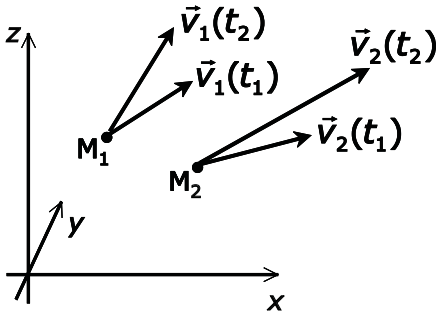


Figure 1.7: Point de vue Eulérien : la vitesse, mesurée aux points M_1 ou M_2 évolue au cours du temps.

La vitesse $\vec{V_M}(t)$ associée au point M évolue au cours du temps. A chaque instant l'écoulement du fluide est décrit au moyen d'un champ de vecteurs vitesse. Dans cette description, on appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente aux vecteurs vitesse (cf. Figure 1.8).

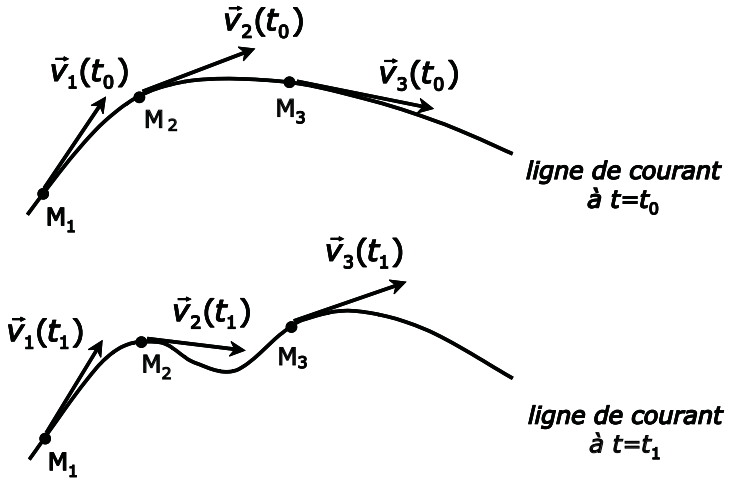


Figure 1.8: Lignes de courant à différents instants.

La description de Lagrange consiste à suivre une particule donnée au cours de son mouvement au sein du fluide. Ici, c'est l'évolution de la position des particules qui permet la description de l'écoulement. On appelle trajectoire le lieu géométrique des positions successives occupées par une particule (cf. Figure 1.9).

Lignes de courant et trajectoire sont bien deux notions très différentes (cf. Figure 1.10), sauf si l'écoulement est stationnaire, c'est à dire que le champ de vecteurs vitesse est constant dans le temps : il y a alors concidence entre lignes de courant et trajectoires. Nota : un écoulement stationnaire est aussi dénommé écoulement permanent.

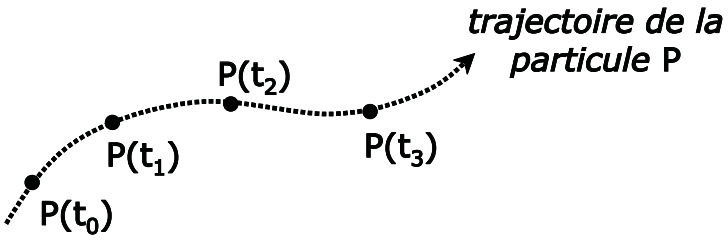


Figure 1.9: Définition de la trajectoire

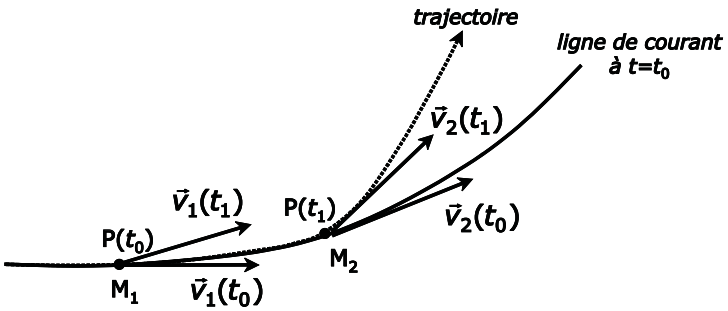


Figure 1.10: Différence entre trajectoire et ligne de courant

Chapter 2

Ecoulements de fluides parfaits

L'établissement des équations complètes régissant l'écoulement d'un fluide réel, c'est-à -dire visqueux, est complexe. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous allons commencer par établir les équations d'un fluide parfait ce qui suprime donc le terme lié aux contraintes visqueuses. Cette étape intermédiaire permettra une transition entre la relation Fondamentale de la Dynamique (RFD) vue en Mécanique du Point et la Mécanique des Fluides où on s'intéresse à ce qui se passe en un point donné de l'écoulement.

2.1 Définition d'un fluide parfait

Il s'agit donc d'un fluide théorique de viscosité nulle ($\mu = \nu = 0$). On fait l'hypothèse que les molécules du fluide glissent les unes sur les autres sans frottement (alors qu'il existe des forces d'interaction moléculaires dans un fluide réel). Signalons que l'Hélium liquide à quelques degrés Kelvin se rapproche d'un fluide parfait tant sa viscosité tend vers 0.
L'absence de viscosité se fait mieux ressentir lorsqu'on compare sur la Figure 2.1 les écoulements de fluides réels et parfaits dans diverses situations.

2.2 Rappel de la Relation Fondamentale de la Dynamique

Pour une particule de masse m la RFD exprime le lien qui existe entre la somme des forces extérieures agissant sur m et son accélération : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f}$ soit par unité de volume :

$$\rho\vec{a} = \vec{f_v}$$

$\vec{f_v}$ représente l'ensemble des forces de volume qui peuvent agir sur un fluide : gravité, forces électriques, magnétiques, thermiques, etc

2.3 Equation d'Euler

La relation de la Dynamique permettrait d'étudier le mouvement de chaque particule fluide une à une mais le nombre d'équations à résoudre sera aussi grand que le nombre de particules contenues dans le fluide. On réalise donc une approche dite de milieu continu dans laquelle on va exprimer la vitesse et l'accélration du fluide en un point donné de l'écoulement (de coordonnées $\vec{r}$ et ceci en fonction du temps t). On cherche donc à établir une équation qui fournisse les valeur de la vitesse $V(\vec{r}, t)$ et de la pression $P(\vec{r}, t)$, ainsi que $T(\vec{r}, t)$, si le fluide n'est pas isotherme ou $c(\vec{r}, t)$ si le fluide transporte un constituant en solution de concentration C.
Pour cela on considère donc un élément de volume sur lequel on va d'abord exprimer la rsultante des foces de pression (cf. Figure 2.2.

Pour une surface S et dans la seule direction x la force résultante (en Newton) vaut :

$$+P(x)S - P(x + dx)S = -\frac{dP}{dx}Sdx$$

soit en divisant par le volume fluide Sdx la force volumique selon Ox se résume à $-\frac{dP}{dx}$. En généralisant aux 3 directions de l'espace on déduit la force résultante de pression :

$$\vec{f_P} = -\vec{grad}P = -\vec{\nabla}P$$

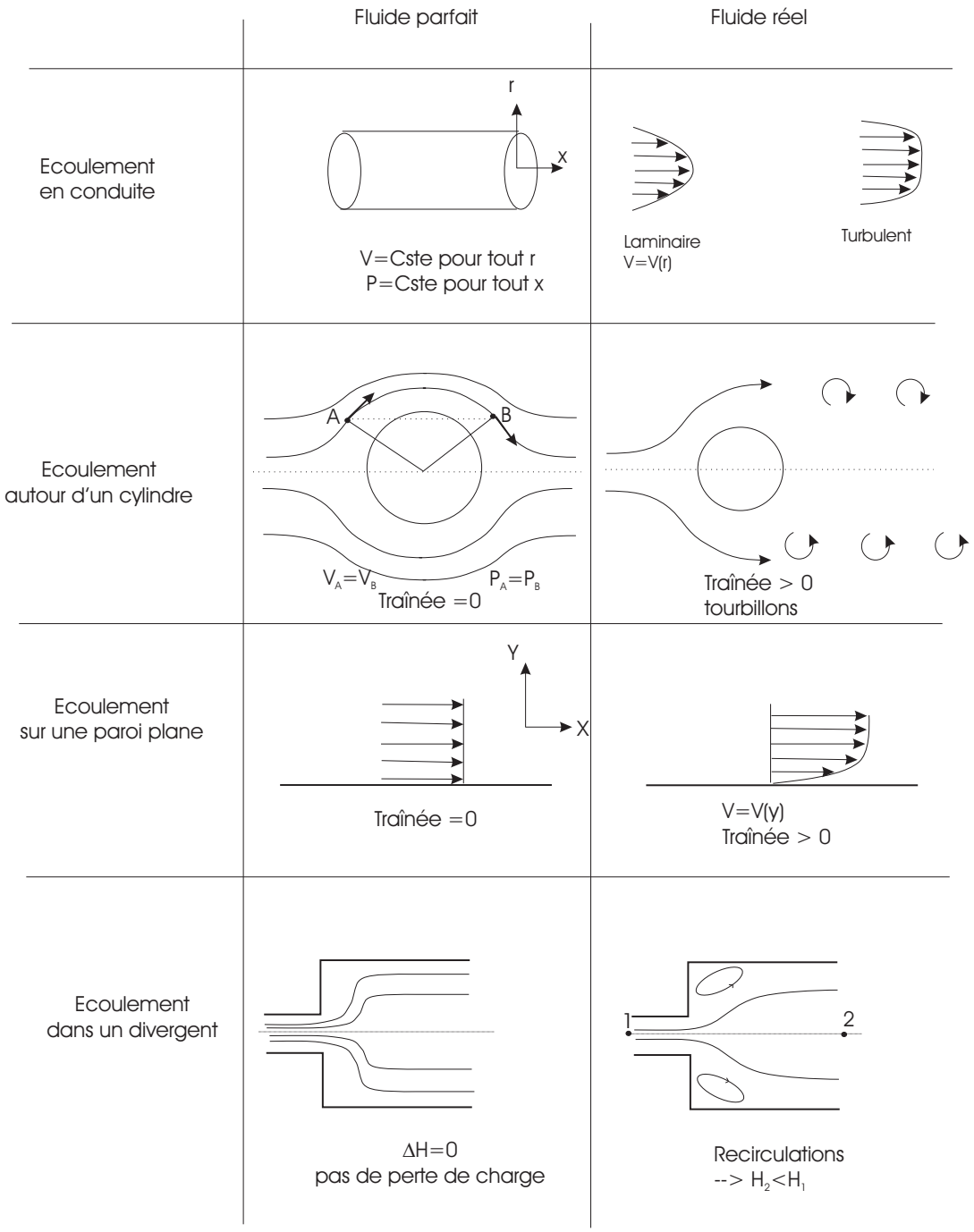


Figure 2.1: Comparaison de l'écoulement d'un fluide parfait et réel dans diverses situations.

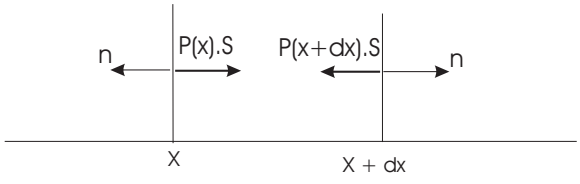


Figure 2.2: Bilan des forces de pression sur une tranche d'épaisseur x.

Nous allons maintenant exprimer l'accélération.

Expression Eulérienne de l'accélération

Figure 2.3: Ecoulement 1D selon Ox.

Considérons un écoulement $1D$ selon Ox : en M la vitesse vaut V_x et en M' vaut $V_x^{'}$. L'accélération a_x (suivant Ox) au sens de Lagrange, c'est-à -dire en suivant la particule, s'écrit :

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{V_x^{'}(t+dt) - V_x(t)}{dt}$$

La formulation d'Euler cherche à exprimer l'accélération en fonction des variations locales par rapport au temps et à l'espace : pour distinguer les deux types de dérivées, on notera $\frac{\partial}{\partial t}$ ou encore $\frac{\partial}{\partial x}$ une dérivée locale par rapport à t ou x. On n'utilisera la dérivée droite que pour une dérivée au sens clasique c'est-à -dire Lagrangien.

Relation entre accélération Lagrangienne et Eulérienne Ecrivons dabord que $V_x^{'}(t+dt) = V_x(t+dt) + \frac{\partial V_x}{\partial x}dx$. Ceci s'écrit aussi:

$$V_x^{'}(t+dt) = V_x(t) + \frac{\partial V_x}{\partial t}dt + \frac{\partial V_x}{\partial x}dx$$

d'où l'expression de l'accélération selon Ox :

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}$$

En $3D$ on aurait écrit :

$$a_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}$$

expression que l'on note aussi :

$$a_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})V_x$$

On aurait trouvé des expressions équivalentes pour a_y et a_z de sorte que la relation finale liant l'accélération particulaire (Lagrangienne) et locale (Eulérienne) s'écrit :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}$$

et l'Equation d'Euler d'un fluide parfait soumis à des forces de pression, à la gravité et à d'éventuelles forces externes $\vec{f_V}$ s'écrit :

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right] = -\vec{grad}P + \rho\vec{g} + \vec{f_V}$$

Le formulaire joint en fin de document donne les diverses expressions des opérateurs usuels en coordonnées cartésiennes ou cylindriques.

Cas particuliers :

- Ecoulement permanent : la dérivée par rapport au temps vaut 0 , cad. que la vitessse en un point quelconque ne varie pas avec le temps soit $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$.
- Ecoulement établi : signifie que l'écoulement cesse de varier en espace. Lorsqu'un fluide pénètre dans un tuyau par exemple, il faut une certaine longueur (de l'ordre de 30 à 50 fois le diamètre hydraulique) pour que le profil de vitessse ne varie plus suivant la direction d'avancement du fluide : on dit que l'écoulement est alors établi d'où : $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 0$.

L'équation vectorielle d'Euler peut être projetée sur les 3 directions de l'espace et fournit ainsi 3 équations. Toutefois, un problème standard 3D de Mécanique des Fluides possède 4 inconnues : 3 de vitesse et 1 de pression : il manque donc une équation que nous allons voir maintenant.

2.4 Conservation de la matière

Un bilan de masse sur une surface S entourant un volume V doit traduire que, pendant un intervalle de temps dt, la différence entre les débits de masse entrant et sortant est nécessairement égale à la masse de matière accumulée dans le volume V pendant le temps dt. Ceci s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho dv + \int_S \rho.(\vec{V}.\vec{n_e})d\sigma \ = \ 0$$

Le membre de gauche représente la variation temporelle de masse ($\frac{\partial M}{\partial t}$) du volume v: , tandis que le membre de droite représente le bilan global de masse ayant traversé la surface S entourant le volume v.

Le théorème d'Ostrogradski permet de transformer cette relation : il permet en effet d'évaluer une intégrale de surface d'un champ de vecteur $\vec{A}$ à partir de la divergence de ce champ de vecteur dans le volume enfermé par la surface, soit:

$$\int_S \vec{A}.\vec{n}\ dS = \int_v div\vec{A}\ dv$$

où $\vec{n}$ désigne la normale orientée vers l'extérieur. Rappelons que la divergence est un opérateur qui s'applique à un vecteur et traduit les variations du flux de ce vecteur au travers d'un volume infiniment petit placé autour du point où l'on calcule cette divergence. En coordonnées cartésiennes il s'écrit:

$$div\ \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

L'équation de conservation de la matière devient donc:

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}.dv + \int_v div(\rho\vec{V})dv = 0$$

qui, en faisant tendre le volume v vers 0 donne:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\ (\rho\vec{V}) = 0$$

cette relation peut aussi s'écrire sous une autre forme, équivalente:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\ \text{div}\ \vec{V} = 0$$

Pour un fluide incompressible ($\rho = Cste$) en écoulement permanent, cette relation devient plus simple et s'écrit:

$$\boxed{div\vec{V} = 0}$$

Chapter 3

Bilans de matière et d'énergie dans un écoulement

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre à faire un bilan à travers une surface : deux types de bilan seront faits : des bilans sur des quantités scalaires (sans direction) telles que la masse, l'énergie, un soluté transporté par l'écoulement ou encore des bilans de quantité de mouvement qui est une grandeur vectorielle : l'objectif ce travail étant d'exprimer le théorème de quantité de mouvement dont l'aplication permet de quantifier la force qu'exerce un écoulement sur une paroi.

3.1 Bilan de matière

Cette expression est aussi appelée bilan de masse : on cherche ici à chiffrer le débit massique ou volumique qui traverse une surface.
Cas particulier : Champ de vitesse constant, de valeur V et perpendiculaire à la surface S:
Le débit volumique vaut simplement : $Q_V = VS$ et le débit massique $Q_m = \rho VS$.
Dans le cas le plus général (cf. Figure 3.1) les expressions précédentes deviennent alors :

$$Q_V = \int\int_S \vec{V}.\vec{n}dS$$

et

$$Q_m = \int\int_S \rho\vec{V}.\vec{n}dS$$

.

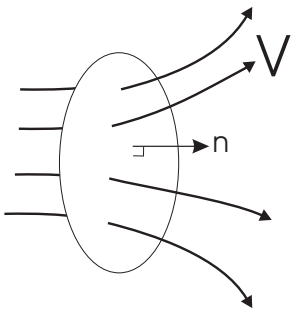


Figure 3.1: Débit d'un champ de vitesse à travers une surface S

- Si $\rho = Cste$ alors : $Q_m = \rho Q_V$ - Bilan à travers un tube de courant : cf. Figure 3.2 :on a alors dans le cas le plus général ($\rho_1 \neq \rho_2$) d'un écoulement compressible : $\int\int_{S_1} \rho_1\vec{V_1}.\vec{n}dS = \int\int_{S_2} \rho_2\vec{V_2}.\vec{n}dS$. Si $\rho_1 \sim \rho_2$ et que V_1 et $V_2 \sim Cste$ alors : $V_1S_1 = V_2S_2 = Q_V$. - Sinon, on peut toujours revenir à la définition de la vitesse débitante $\overline{V} = \frac{Q}{S}$ et écrire : $\overline{V_1}S_1 = \overline{V_2}S_2$
Exemples de calcul de débit à travers une surface:

Exemple 1 : Débit d'un profil de vitesse parabolique en conduite cylindrique (cf Figure 3.3)

.

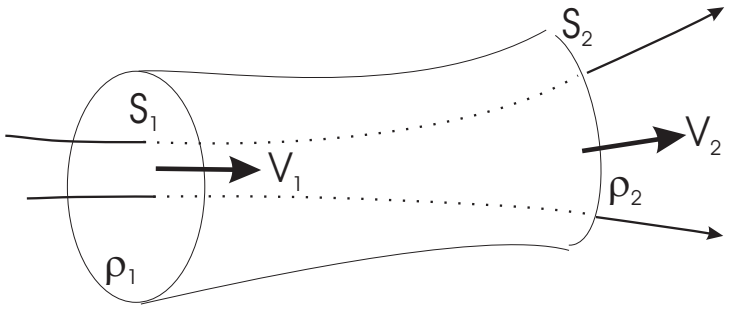


Figure 3.2: Débit à travers un tube de courant

.

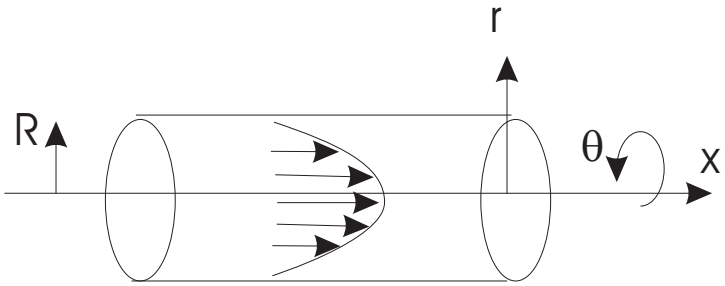


Figure 3.3: Exemple 1 : débit d'un profil parabolique en conduite cylindrique

Le champ de vitesse est défini par :

$$V_x(r) = V_{max}(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

On en déduit le débit volumique:

$$Q = \int_0^R V_x 2\pi r dr = 2\pi V_{max}(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4})$$

d'où:

$$\overline{V} = \frac{V_{max}}{2}$$

Exemple 2 : débit d'un profil parabolique entre plans parallèles cylindrique (cf Figure 3.4) :

.

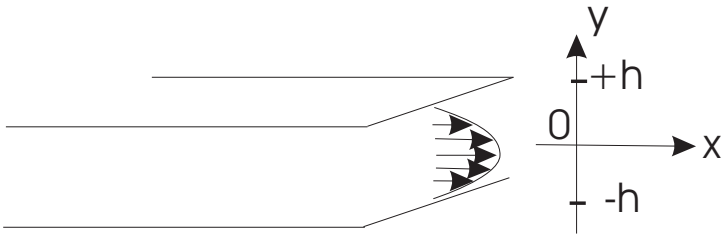


Figure 3.4: Exemple 2 : débit d'un profil parabolique entre plans parallèles

Le champ de vitesse est ici défini par :

$$V_x(y) = V_{max}(1 - \frac{y^2}{h^2})$$

et on en déduit le débit volumique par unité de largeur :

$$\frac{Q}{l} = 2\int_0^h V_x dy = 2V_{max}(h - \frac{h}{3}) = \frac{4}{3}hV_{max}$$

d'où :

$$\overline{V} = \frac{2}{3}V_{max}$$

Exemple 3 : Ecoulement tournant entre deux cylindres concentriques (cf Figure 3.5) :

.

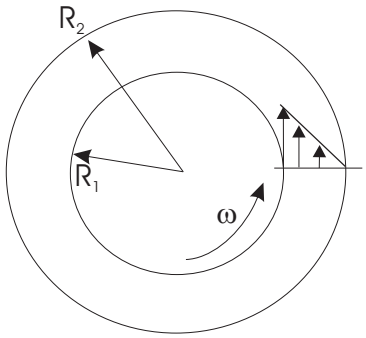


Figure 3.5: Exemple 3 : débit d'un écoulement tournant entre deux cylindres

Cette situation se rencontre par exemple dans un viscosimètre, appareil servant à mesurer la viscosité d'un fluide que l'on ne connaît pas (c'est entre autres le cas d'un nouveau produit que l'on vient de formuler) : le cylindre interne tourne à la vitesse angulaire ω tandis que le cylindre externe est à l'arrêt. Si les rayons R_1 et R_2 sont proches, on peut montrer que le champ de vitesse s'exprime ainsi:

$$V_\theta(r) = \frac{\omega R_1}{R_2 - R_1}(R_2 - r)$$

d'où le débit tournant par unité de hauteur du cylindre:

$$\frac{Q}{h} = \int_{R_1}^{R_2} V_\theta dr = \omega R_1 \frac{R_2 - R_1}{2}$$

d'où la vitesse débitante :

$$\overline{V} = \frac{\omega R_1}{2}$$

qui est donc la vitesse moyenne entre la paroi interne qui tourne à ωR_1 et la paroi externe qui est à vitesse nulle

Exemple 4 : Ecoulement axial entre deux cylindres concentriques (cf. Figure 3.6) :

Si les rayons R_1 et R_2 sont très différents on doit chercher la solution du profil de vitesse $V_z(r)$ et l'intégrer entre ces mêmes bornes soit :

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} V_z dr$$

Si R_2 est très proche de R_1 de sorte que l'onpeut écrire : $R_2 \sim R_1 + e$ alors onpeut se servir du résultat de l'exemple 2 et on obtient :

$$Q = 2\pi Re\frac{2}{3}V_{max}$$

.

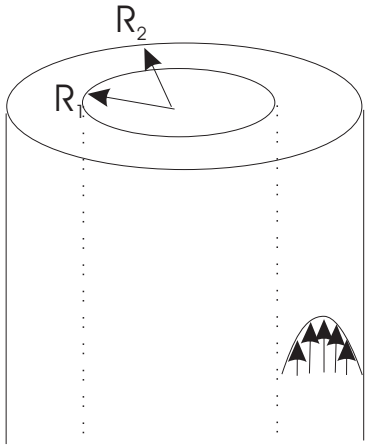


Figure 3.6: Exemple 4 : débit d'un écoulement axial entre deux cylindres

3.2 Bilan de quantité de mouvement

Intuitivement, tout le monde a déja ressenti la notion de "force" d'un écoulement où d'un jet d'eau. On pourrait penser que cette "force" est seulement liée au débit mais l'exemple de la lance à incendie qui suit contredit ce sentiment. Dans la première expérience, un jet d'eau à $1m/s$ est issu d'un tuyau horizontal et frappe un plan vertical monté sur un ressort. Le ressort se comprime de façon à équilibrer la force que le jet exerce sur la plaque. Dans la seconde expérience, le tuyau est équipé d'un convergent de sorte que la vitesse de sortie du fluide augmente. Pourtant le débit est le même que dans le cas précédent. On voit alors que le ressort est plus comprimé, traduisant le fait que la force exercée par l'écoulement sur la plaque est plus élevée. On vient donc de montrer que, en plus d'un débit massique ou volumique, un écoulement possède aussi un certain *débit de quantité de mouvement*. Un autre exemple illustrant la force d'un écoulement est la technique industrielle de découpe de matériaux métalliques qui consiste à utiliser un jet d'eau sous très haute pression (plusieurs centaines de bars).

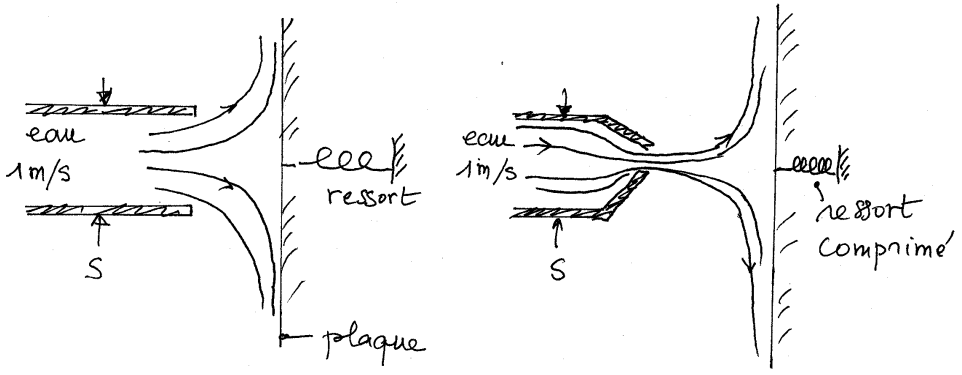


Figure 3.7: Illustration de la quantité de mouvement d'un écoulement.

La quantité de mouvement par unité de volume est le vecteur $\rho\vec{V}$ (en $N.m^{-3}$). Comme beaucoup d'autres quantités scalaires ou vectorielles, la quantité de mouvement est une grandeur qui est transportée par l'écoulement et pour laquelle on peut faire un bilan. Par analogie avec ce qui a été montré pour calculer un débit de masse, le débit de quantité de mouvement (qdm) à travers une surface Σ s'écrit:

$$\int\int_{\Sigma} \rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})d\sigma$$

Considérons maintenant une surface Σ **fermée**, entourant un volume v: le théorème de quantité de mouvement exprimé sur cette surface s'écrit:

$$\vec{F}_e = \int_\Sigma \rho \vec{V}(\vec{V}.\vec{n})d\sigma$$

* Le terme de gauche représente la contribution des forces externes qui peuvent diminuer ou augmenter la qdm du fluide contenu dans le volume v. Ce sont:

- les forces de pression (surfaciques) qui peuvent diminuer ou augmenter la qdm
- les forces de viscosité qui, le plus souvent, consomment de la qdm
- la force de pesanteur
- les forces de volume qui peuvent être électriques, thermiques etc...

* Le terme de droite, comme on l'a vu, représente le bilan global au travers de la surface fermée Σ qui est souvent dénommée "Surface de contrôle".

Protocole d'application du théorème de quantité de mouvement:
- choisir un système d'axes orientés
- choisir une surface fermée adaptée
- orienter les normales à cette surface vers l'extérieur
- projeter les équations de qdm sur chaque axe

Exemple 1: Ecoulement établi en conduite cylindrique (cf Figure 3.8)

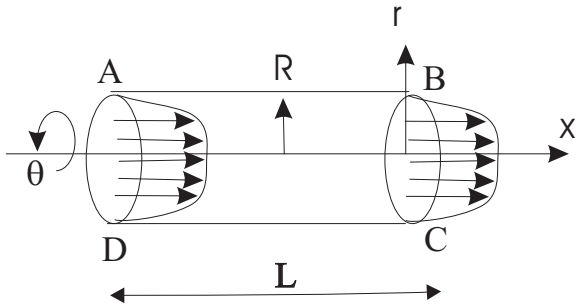


Figure 3.8: Calcul de la contrainte sur un tube.

L'écoulement étant établi signifie que le champ de vitesse ne varie plus selon Ox, d'où $\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$. En choisissant la surface $ABCD$ (qui est un tronc de cylindre) on en déduit $\int\int_{S_1+S_2} \rho V_x(\vec{V}.\vec{n})dS = 0$. D'où : $+P_1\pi R^2 - P_2\pi R^2 - \tau_P 2\pi RL = 0$ ce qui donne la valeur de la contrainte pariétale:

$$\tau_P = \frac{(P_1 - P_2)R}{2L} = \frac{\lambda}{4}\frac{1}{2}\rho\overline{V}^2$$

Exemple 2 : Poussée sur un coude (cf Figure 3.9)

Valeurs numériques : $P_1 = 16.10^5 Pa$, $S_1 = 0.08m^2$, $V_1 = 5m/s$, : $P_2 = 10.10^5 Pa$, $S_2 = 0.01m^2$, $\rho_f = 1000kg/m^3$
Posons : $\vec{R}$: action du fluide sur le coude d'où: $-\vec{R}$: action du coude sur le fluide. En négligeant le poids, la projection selon Ox et oy donne:

$$-\rho V_1^2 S_1 = P_1 S_1 - R_x$$
$$+\rho V_2^2 S_2 = -P_2 S_2 - R_y$$

d'où:

$$R_x = P_1 S_1 + \rho V_1^2 S_1 = P_1 S_1 + \rho Q V_1 = 130000N$$

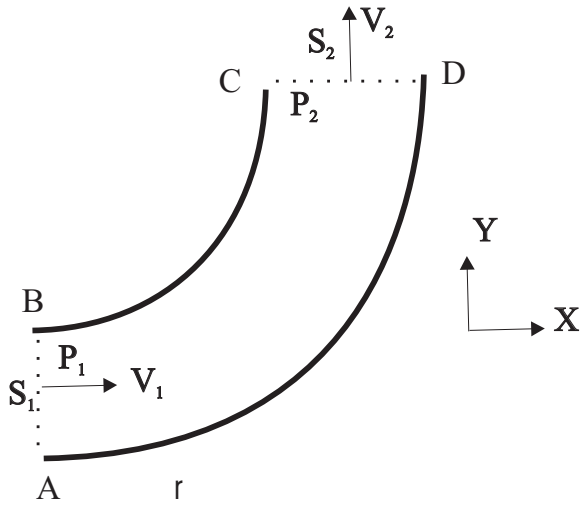


Figure 3.9: Calcul de la poussée sur un coude.

$$R_y = -P_2 S_2 - \rho V_2^2 S_2 = -P_2 S_2 - \rho Q V_2 = -2600N$$

d'où l'angle que fait la force avec l'horizontale:$\theta = Arctg(R_y/R_x) = 11,3^o$

Exemple 3 : Poussée d'un jet axisymétrique liquide sur une plaque (cf Figure 3.10)

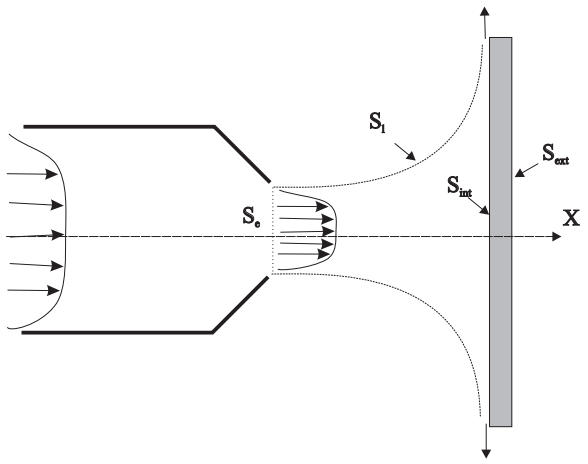


Figure 3.10: Calcul de la poussée sur un coude.

Hypothèses : la pression P est contante dans tout le jet liquide ($P = P_{atm}$) On constitue une surface fermée par $S_e + S_l + S_{int}$
On appelle $\vec{R}$ l'action du jet sur la plaque. La projection sur Ox donne :

$$-\rho V^2 S = P_0 S_{int} - R_x$$

Bilan sur la face interne de la plaque : $R_x = \rho V^2 S + P_0 S_{int}$
Bilan sur la face externe : $-P_0 S_{int}$
D'où la résultante : $+\rho V^2 S$.

Exemple 4 (à résoudre) :jonction de 2 écoulements (cf Figure 3.11)

Dans la section A 2 écoulements de vitesse et de section distinctes se mélangent :
- Déterminer $V_2 = f(V_1)$
- Exprimer $P_A - P_B$ en fonction de (ρ, V_1)

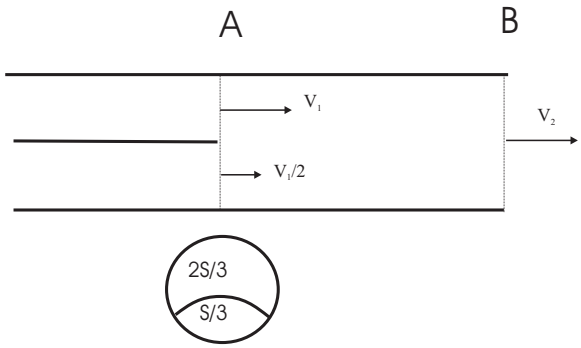


Figure 3.11: Jonction de deux écoulements.

Chapter 4

Dynamique des fluides visqueux

Nous avons vu que l'équation d'un fluide parfait (non visqueux) soumis à une force volumique $\vec{f_v}$ incluant la gravité est donnée par l'équation d'Euler:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{grad}\ p + \vec{f_v}$$

Comme on peut le pressentir, la viscosité crée dans un écoulement des contraintes, dénommées contraintes visqueuses, qu'il convient de prendre en compte si l'on veut établir l'équation d'un fluide réel visqueux : l'objet de ce chapitre est d'établir l'expression du terme traduisant ces effets visqueux et qu'il faudra donc ajouter à l'équation d'Euler pour la compléter.
Avant cela donnons quelques exemples qui illustrent l'effet de la viscosité.

Elargissement d'un jet :cet exemple se rencontre par exemple en combustion lorsqu'on injecte sous forme de jet le carburant dans la chambre de combustion. Dans le cas des moteurs d'Ariane le mélange $O_2 - H_2$ se fait par deux jets cylindriques concentriques (cf. Figure 4.1). On observe l'effet de lissage de la viscosité qui tend à homogénéiser le champ de vitesse qui de ce fait s'élargit mais diminue d'intensité. On retient donc que la viscosité tend à gommer les différences de vitesse.

Le second exemple (cf. Figure 4.2) illustre la célèbre expérience de Reynolds dans laquelle on injecte un filet d'encre dans un fluide au repos. Pour une très faible vitesse d'injection, c.a.d. un faible Reynolds, l'encre se fraie un chemin en diffusant très peu dans la direction transverse. Lorsqu'on augmente la vitesse d'injection, la dispersion devient alors majeure.

4.1 Expérience de Couette

Cette expérience (cf. Figure 4.3) sert à quantifier l'effet de la viscosité lorsqu'on varie le champ de vitesse. Plus précisément c'est surtout l'influence du cisaillement que l'on cherche à quantifier c.a.d. l'influence des variations spatiales de vitesse (gradients). Le fluide étudié remplit l'espace situé entre deux cylindres concentriques. Le cylindre interne tourne à la vitesse ω tandis que le cylindre externe est fixe. La mesure du couple mécanique résistant sur l'arbre moteur donne accès à la valeur de la force tangentielle F qui freine le cylindre interne. Appelons V la vitesse linéaire de la paroi interne, S la surface mouillée, e l'entrefer, et F la force résistante au mouvement:

L'expérience montre que le rapport:

$$\frac{F}{\frac{S.V}{e}}$$

est constant pour un grand nombre de fluides usuels (air, eau,...). Cette constante est la viscosité dynamique μ. On voit donc que la contrainte τ, rapport de la force F à la surface mouillée S, s'écrit:

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu.\frac{V}{e}$$

avec: $V = \omega R$ et $S = 2\pi Rh$. La quantité V/e représente en fait le gradient de vitesse $\frac{dU}{dr}$ où r représente la direction normale à l'écoulement.

Pour cette expérience particulière, on voit donc que la contrainte τ vaut: $\tau = \mu\frac{dU}{dr}$. Cette contrainte s'exprime en N/m^2. Pour un écoulement tridimensionnel quelconque d'un fluide incompressible, il existe en fait un champ de contraintes beaucoup plus complexe que celui de l'écoulement de Couette. Il faut donc définir d'abord un système de notation rigoureux. Considérons la figure 4.5 où τ_{ij} désigne la contrainte visqueuse de direction i exercée sur une face de normale j.

On montre qu'un grand nombre de fluides voient leur contrainte définie par:

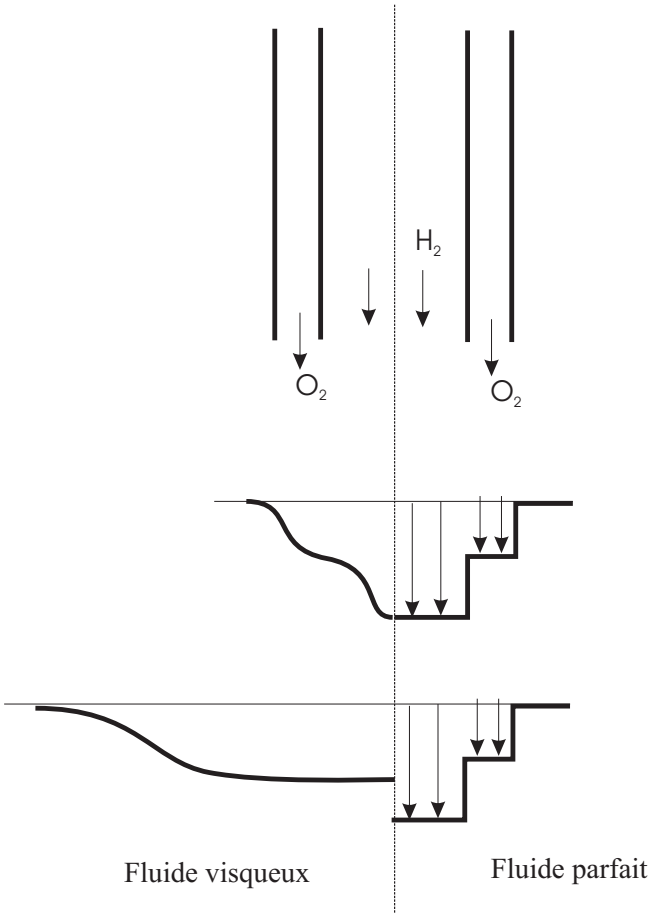


Figure 4.1: Dispersion du champ de vitesse dans la chambre de combustion d'un moteur de fusée

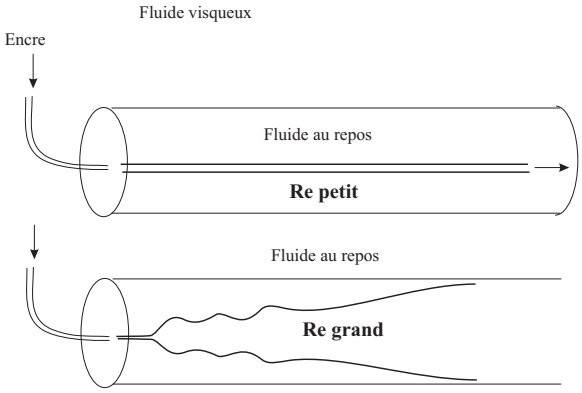


Figure 4.2: Expérience de Reynolds

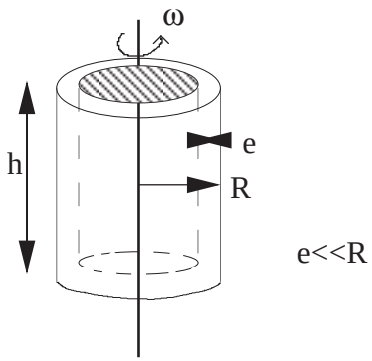


Figure 4.3: Expérience de Couette

$$\boxed{\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)}$$

Cette loi de comportement est celle des Fluides Newtoniens.

Toujours pour un fluide incompressible, on tire facilement les expressions des contraintes τ_{ij} en fonction des composantes (u, v, w) de la vitesse :

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Lorsqu'on cherche à faire le bilan des contraintes sur un volume de contrôle, il convient d' exprimer la contrainte en fonction de la normale $\vec{n}$ à chaque face. On écrira:

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n}$$

où $\vec{n}$ désigne la normale dirigée vers l'extérieur. Considérons le volume de contrôle $ABCD$ de la Figure 4.4 inclus dans un écoulement unidirectionnel variant dans la direction perpendiculaire à BC et AD. La contrainte qui s'exerce sur BC aura un signe > 0 du fait que $\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ (la vitesse augmente quand on se déplace dans la direction n_1). La contrainte s'exercant sur AD sera < 0 car $\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ (la vitesse diminue quand on se déplace dans la direction n_2).

Ainsi, si le profil de vitesse est linéaire, la quantité $\frac{\partial V}{\partial n}$ sera égale, en valeur absolue, sur BC et sur AD, de sorte que la force résultante sur le volume $ABCD$ sera nulle.

4.2 Equations de Navier-Stokes

Nous venons de voir comment calculer le champ de contrainte τ en fonction des variations spatiales (des gradients) du champ de vitesse. Toujours dans l'objectif de déterminer le terme dû à la viscosité que nous souhaitons ajouter à l'équation d'un fluide parfait (équation d'Euler) il faut maintenant déterminer la force volumique qu'exerce un champ $\vec{\tau}$ de contrainte existant

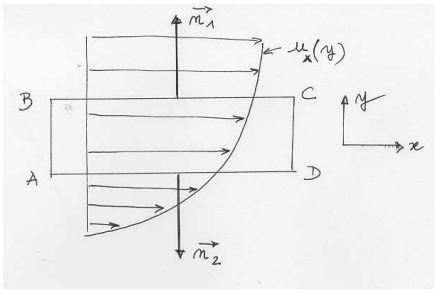


Figure 4.4: Conventions de signe pour le signe de la contrainte τ.

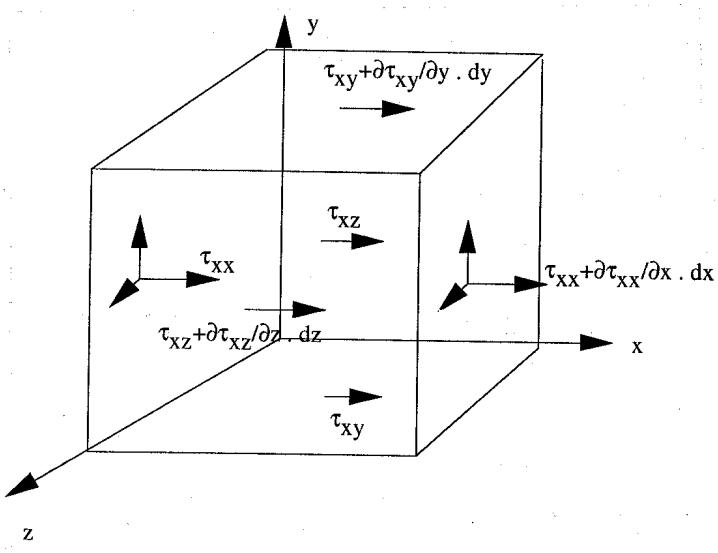


Figure 4.5: Volume élémentaire

dans le fluide.

Considérons le volume élémentaire représenté sur la figure 4.5.

De même que la pression n'intervenait que par son gradient, on montre que les contraintes visqueuses n'interviennent que par leur divergence et produisent, par exemple suivant Ox le terme suivant :

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

C'est donc par sa divergence que le tenseur des contraintes visqueuses τ interviendra dans l'équation du mouvement d'un fluide réel.

Par unité de volume, et toujours dans la direction x, l'équation du mouvement d'un fluide réel s'écrit donc:

$$\rho \frac{dU_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + div\ \vec{\tau_x} + f_x$$

où f_x désigne les forces de volume s'exercant sur le fluide dans la direction x.
Une écriture vectorielle plus compacte de cette équation sera:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + div\overline{\tau} + \vec{f_v}$$

En reportant les relations ci-dessus dans l'équation du mouvement, on obtient, pour la composante x:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + f_x$$

Après avoir remarqué que la somme de trois des termes de cette équation est nulle (car égale à $\partial(div\vec{V})/\partial x$), et après avoir mené des calculs similaires pour les deux autres composantes y et$z$, on obtient l'équation vectorielle suivante:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{f_v}$$

C'est l'équation de Navier-Stokes. Dans cette formulation, $\vec{f_v}$ s'exprime en N/m^3 et $\mu = \rho\nu$ représente la viscosité dynamique du fluide. Le formulaire placé en Annexe fournit les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

4.3 Les conditions aux limites

Les composantes de l'équation de Navier-Stokes fournissent un ensemble d'équations différentielles auquel il convient d'adjoindre les conditions aux limites adéquates.

- Pour une paroi: la condition d'adhérence impose:
$$\vec{V} = 0$$

- Pour un axe de symétrie
En cartésien: Prenons l'exemple de l'écoulement entre deux plans fixes parallèles à Ox. Sur l'axe Ox de symétrie on écrira:
$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \text{ et } v_y = 0$$
*En coordonnées cylindriques et pour un écoulement axisymétrique, on écrira, sur l'axe:
$$u_r = 0 \text{ et } u_\theta = 0 \text{ et } \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$$

- Pour une surface libre:
$$u_y = 0 \text{ et } \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0$$

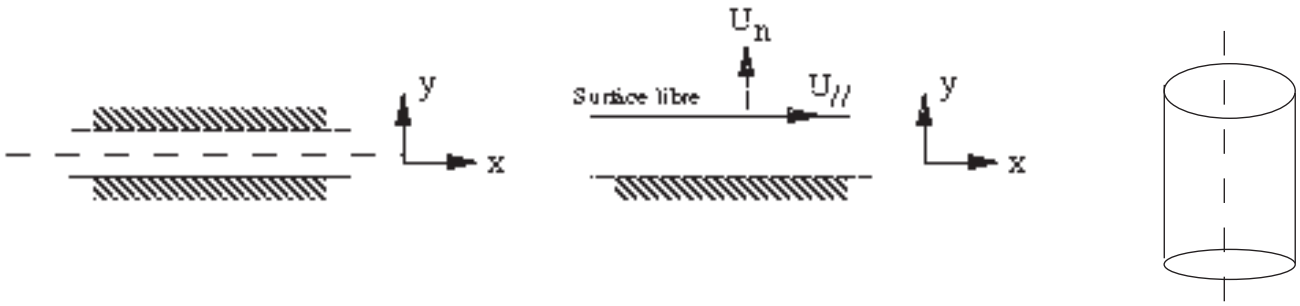


Figure 4.6: Différentes conditions de symétrie

4.4 Viscosité des fluides non-Newtoniens

Beaucoup de fluides s'apparentent à un fluide Newtonien. Toutefois, il n'est pas toujours possible de les considérer comme tels.

Nous avons vu qu'un fluide Newtonien est tel que la contrainte τ qu'il exerce est proportionnelle au taux de déformation. En écoulement unidirectionnel, cela s'écrit:

$$\tau = \mu \frac{dU_x}{dy}$$

où μ est une constante caractéristique du fluide.
Pour un fluide non-Newtonien, on pose quand-meme:

$$\tau = \mu_a \frac{dU_x}{dy} \tag{4.1}$$

où μ_a est la viscosité apparente du fluide qui ne sera donc plus une constante. On distingue plusieurs classes de fluides tels que:

- Fluides de Bingham
  La relation contrainte-taux de déformation s'écrit:

  $$\tau = \tau_0 + \mu_0 \frac{dU_x}{dy}$$

  On note dans ce cas l'existence d'un *seuil* de contrainte au dessous duquel le fluide ne se met pas en mouvement (cf courbe numéro 4).

- Fluides d'Ostwald
  Leur loi de comportement se met sous la forme:

  $$\tau = C(du/dy)^n = C(du/dy)^{n-1}\ du/dy$$

  par identification avec la formule 4.1 on obtient:

  $$\mu_a = C(du/dy)^{n-1}$$

  Si $n = 1$, le fluide est Newtonien (courbe 1)
  Si $n > 1$, le fluide est dit dilatant: sa viscosité augmente avec le taux de déformation. On dit aussi qu'il est rhéo-épaississant. Exemples: amidon, guimauve (courbe 5).

  Si $n < 1$, le fluide a un comportement pseudo-plastique, c'est-à-dire que sa viscosité diminue avec le taux de déformation (margarine, huile végétale, mayonnaise, ...). On dit que le fluide est rhéo-fluidisant (courbe 6).

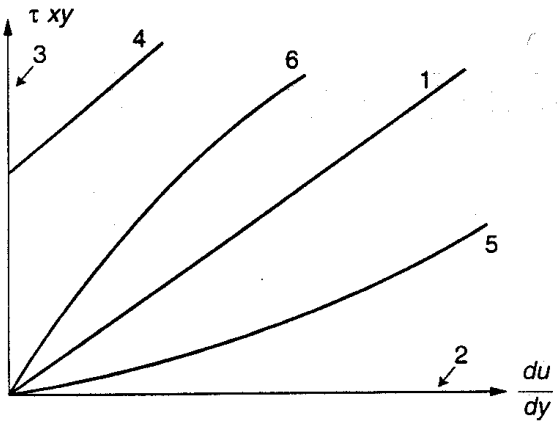


FIG. 15. – *Exemples de lois de comportement*

1. Fluide newtonien – 2. Fluide parfait – 3. Solide parfait – 4. Fluide de Bingham – 5. Fluide dilatant – 6. Fluide pseudo-plastique.

Figure 4.7: Exemples de lois de comportement d'après Comolet

Chapter 5

Ecoulements en conduites et canaux

Les exemples qui suivent illustrent des situations d'écoulements *laminaires* simples en conduites pour lesquels une solution analytique peut facilement être obtenue.

5.1 Ecoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux plans parallèles

Considérons l'écoulement d'un fluide visqueux s'écoulant entre deux plaques parallèles infinies sous l'effet d'un gradient de pression constant.

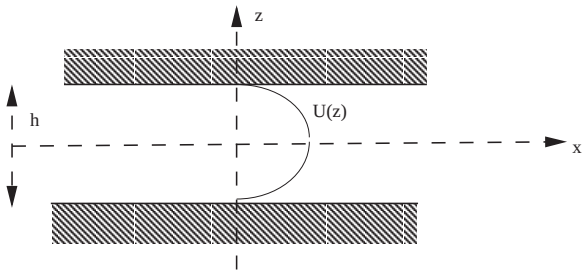


Figure 5.1: Ecoulement de Couette entre plans parallèles

Hypothèses: Supposons l'écoulement permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), plan ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$) et infini dans la direction x ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$). La gravité est dirigée suivant Oz. La géométrie inscite à chercher une solution de la vitesse du type $(u(z), 0, 0)$. L'incompressibilité impose:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

tandis que les trois composantes de NS s'écrivent:

$$\text{suivant x : } \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\text{suivant y : } \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\text{suivant z : } -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

d'où, en introduisant la pression étoilée $p^* = p + \rho g z$:

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0$$

On en déduit l'équation différentielle suivante pour u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

d'où:

$$u = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{z^2}{2} + Az + B$$

Les conditions aux limites:

$$u = 0 \; en \; z = \pm\frac{h}{2}$$

fournissent la solution finale:

$$u(z) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{4z^2 - h^2}{8}\right)$$

Le profil de vitesse est donc parabolique. On notera que, pour que l'écoulement soit dirigé vers les x croissants, il faut que le gradient de pression soit < 0 (la pression décroit suivant x). On peut noter les points suivants:

- la vitesse maximum en $z = 0$ est telle que:

$$u_{max} = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

- le débit volumique par unité de largeur des plaques vaut:

$$Q = \int_{-h/2}^{+h/2} u(z)dz = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

  Q s'exprime en $m^3/s/m$.

- la vitesse moyenne $\overline{V}$ vaut:

$$\overline{V} = \frac{Q}{h} = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{3}u_{max}$$

- la contrainte τ_{xz} aux parois vaut:

$$\tau_{xz} = -\mu\frac{\partial u}{\partial z} = \pm\frac{\partial p}{\partial x}.\frac{h}{2} \text{ en z=+h/2 et -h/2}$$

  Le signe - dans l'expression de la contrainte vient du fait que la contrainte sur la paroi est égale et opposée à celle subie par le fluide.

* Cas où la plaque supérieure est animée d'une vitesse uniforme: dans ce cas, le glissement de la plaque (qu'on supposera de vitesse V dirigée vers les $x > 0$) peut être éventuellement conjugué avec un gradient de pression externe. Appelons G ce gradient de pression ($G = \frac{\partial p}{\partial x}$). Si $G < 0$, le gradient de pression est moteur et amplifie le phénomène crée par la plaque. Si $G > 0$ le gradient de pression est dit adverse et s'oppose à l'action de la plaque.

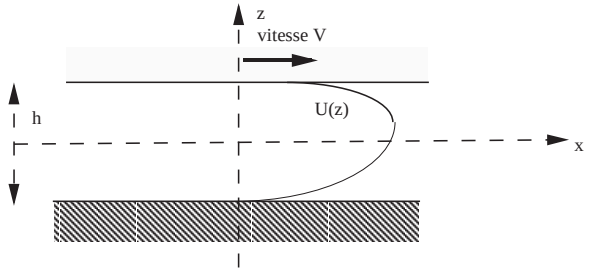


Figure 5.2: Ecoulement de Couette avec une paroi mobile

Les équations sont les mêmes que dans le cas précédant, seules les conditions aux limites changent. Elles s'écrivent:

$$u = 0 \qquad en \quad z = -h/2$$

$$u = V \qquad en \quad z = +h/2$$

On obtient alors la solution:

$$u(z) = \frac{G}{8\mu}\left(4z^2 - h^2\right) + \frac{Vz}{h} + \frac{V}{2}$$

- le débit par unité de largeur vaut maintenant:

$$Q = \int_{-h/2}^{+h/2} u(z)dz = \frac{Vh}{2} - \frac{G}{12\mu}h^3$$

- Si $G = 0$ $u = \frac{V}{h}z + \frac{V}{2}$, et la répartition de vitesse est linéaire.

- la contrainte tangentielle vaut ici:

$$\tau_{xz} = \left(-\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{h/2} \qquad \text{avec} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{Gz}{\mu} + \frac{V}{h}$$

soit:

$$\tau_{xz} = -\left(\mu\frac{V}{h} + \frac{Gh}{2}\right)$$

5.2 Ecoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique

Soit une conduite cylindrique de rayon R dans laquelle s'écoule un fluide visqueux sous l'action d'un gradient de pression $G = \frac{\partial p}{\partial z}$ (on utilise maintenant les coordonnées cylindriques r, θ, z.

Hypothèses on suppose l'écoulement axisymétrique ($\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$) et permanent($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). Cherchons une solution du type ($u_r = 0; u_\theta = 0; u_z = u(r)$).

Remarque la gravité n'est pas prise en compte dans ce calcul: on sait, qu'étant perpendiculaire à l'écoulement, elle ne fait que modifier le champ de pression.

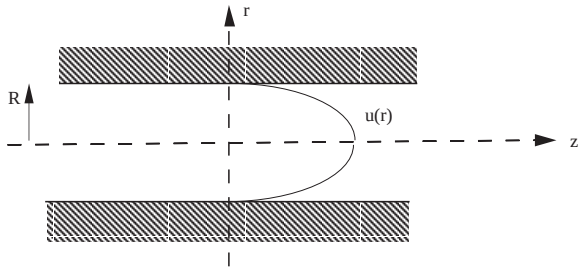


Figure 5.3: Ecoulement de Poiseuille en conduite cylindrique

La continuité impose:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

tandis que les trois composantes de NS s'écrivent:

$$\text{suivant r :} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\text{suivant } \theta : \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{suivant z :} \qquad -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right) = 0$$

Les conditions aux limites $u = 0$ en $r = R$ et $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ en $r = 0$ donnent la solution suivante:

$$u = \frac{G}{4\mu}\left(r^2 - R^2\right) \text{ avec } G < 0$$

- Calcul du débit:

$$Q = \int_0^R u 2\pi r dr = \int_0^R \frac{G}{4\mu}\left(r^2 - R^2\right) 2\pi r dr$$

soit:

$$\boxed{Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} G}$$

Ceci est la formule de Poiseuille.

- Vitesse maximum: en $r = 0$ on trouve:

$$U_{max} = -\frac{GR^2}{4\mu}$$

- Vitesse moyenne (ou encore vitesse débitante):

$$\overline{U} = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{GR^2}{8\mu} = \frac{U_{max}}{2}$$

Valeur de la contrainte: seule la contrainte τ_{rz} n'est pas nulle et vaut:

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{Gr}{2}$$

Notemment en $r = R$ et sur la paroi, on trouve:

$$\tau_{zr} = -\frac{GR}{2}$$

Application au viscosimètre: en faisant circuler dans une conduite circulaire de petit diamètre un fluide visqueux on peut, à partir de la connaissance du gradient de pression et du débit, en déduire la viscosité du fluide. Cela constitue une application de la loi de Poiseuille.

Coefficient de perte de charge en conduite cylindrique

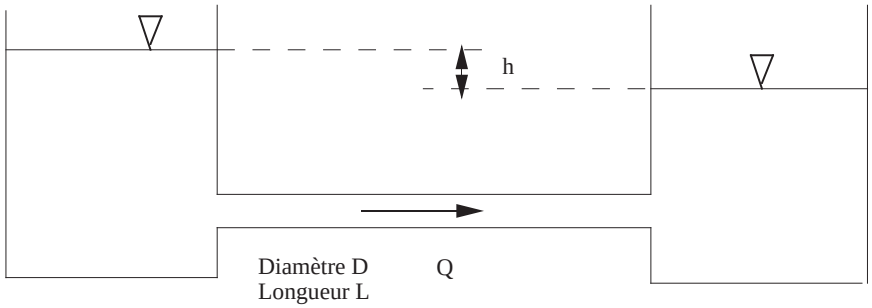


Figure 5.4: Mesure de la perte de charge en conduite cylindrique

En négligeant les pertes de charge singulières, appliquons le théorème de Bernoulli entre l'entrée et la sortie du tuyau:

$$H_1 = H_2 + \lambda \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \rightarrow \lambda \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = h$$

En remplacant l'expression de V par sa valeur en fonction de G et G par: $G = -\frac{\rho g h}{L}$ on déduit l'expression du coefficient de perte de charge λ:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

où Re désigne le nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la conduite:

$$Re = \frac{\overline{V} D}{\nu}$$

5.3 Ecoulement de Couette cylindrique

Considérons le cas où seule la paroi externe tourne. Là encore nous nous limiterons à un régime stationnaire et axisymétrique. Cherchons un champ de vitesse de la forme: $(0; v(r); 0)$.

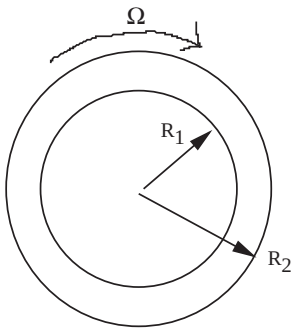


Figure 5.5: Ecoulement visqueux entre deux cylindres tournants

La composante radiale de l'équation de Navier-Stokes traduit l'équilibre entre le gradient radial de pression et la force centrifuge:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v^2}{r}$$

La composante suivant θ s'écrit:

$$\nabla v - \frac{v}{r^2} = 0$$

Suivant z, on vérifie l'équilibre hydrostatique:

$$p^*(r) = p - \rho g z$$

C'est donc bien la résolution de l'équation azimutale qui va donner la solution de l'écoulement. Pour cela, cherchons une solution de la forme r^n. En introduisant ce type de solution dans l'équation de v on trouve:

$$n(n-1)r^{n-2} + n\frac{r^{n-1}}{r} - \frac{r^n}{r^2} = 0$$

d'où l'équation de n:

$$n(n-1) + n - 1 = 0$$

dont les solutions sont:

$$n = \pm 1$$

la solution générale de v s'écrit donc:

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

Conditions aux limites: $v(R_1) = 0$ et $v(R_2) = \Omega R_2$

Ceci fournit la solution finale:

$$v = \frac{\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.r - \frac{\Omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.\frac{1}{r}$$

- Champ de pression: la pression étoilée $p^*(r)$ s'obtient par intégration de $\rho v^2/r$
- Couple résistant: la contrainte tangentielle $\sigma_{r\theta}$ s'écrit:

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) \text{ soit en } R_2 : \sigma_{r\theta} = -\frac{2\mu B}{R_2^2}$$

  On en déduit le couple C de freinage de la paroi externe:

$$C = F.R_2 = \sigma_{r\theta} 2\pi R_2^2 h = 4\pi\mu\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\Omega h$$

- Cas des petits entrefers: En posant $R_1 = R$ et $R_2 = R + \delta$ avec $\delta << R$, on peut faire un développement limité de v qui, naturellement, devient linéaire entre les deux parois.

Chapter 6

Ecoulements sur paroi et autour d'obstacles

Par opposition aux écoulements à l'intérieur de conduites, encore appelés écoulements internes, ce chapitre traite le cas d'écoulements dits " externes ", s'écoulant autour d'obstacles. On considérera d'abord le cas de la plaque plane qui permet de définir la notion de couche limite, puis on considérera le cas d'écoulements autour de cylindres, sphères et autres géométries.

6.1 Ecoulement sur plaque plane

6.1.1 Notion de couche limite

Dans beaucoup de situations, et notamment dans le cas d'écoulements au voisinage de parois solides, la viscosité joue un rôle fondamental qu'il convient d'examiner avec plus de détail. Au voisinage d'un obstacle, par exemple, la condition d'adhérence à la paroi impose $u = 0$ à cet endroit. Au loin, par contre, l'écoulement est animé d'une vitesse externe, ce qui va donc donner naissance à une zone de raccordement, dite Couche Limite dans laquelle les gradients de vitesse sont élevés. Dans cette région, l'écoulement est dit cisaillé . Comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit, on rencontre aussi des écoulements cisaillés dans des situations où il n'y a pas de parois.

Exemples de couches cisaillées dans un fluide visqueux :

- Couche limite au voisinage d'une paroi

  Comme on le voit sur les exemples de la figure 6.1, l'existence d'une paroi se traduit par un infléchissement du profil de vitesse qui va jusqu'à s'annuler sur la paroi elle-même. L'épaisseur de la couche limite va croissante au fur et à mesure de la progression du fluide le long de l'obstacle. Le fluide perd de la quantité de mouvement dans cette zone sous l'effet des contraintes visqueuses qui sont beaucoup plus élevées à cet endroit que dans le reste de l'écoulement dit "écoulement externe". Aussi bien d'un point de vue descriptif que mathématique, on est amené à distinguer deux zones distinctes:

  - la couche limite proprement dite où les gradients de vitesse longitudinaux sont beaucoup plus faibles que les gradients de vitesse transversaux. Cette hypothèse, dite approximation de la couche limite, est à l'origine de grandes simplifications dans le traitement mathématique des équations de Navier-Stokes dans cette zone.
  - l'écoulement externe où la viscosité intervient très peu et où l'écoulement peut être condidéré comme celui d'un fluide parfait. L'une des contributions essentielles de l'écoulement externe est d'imposer son champ de pression à la couche limite. Ainsi, on peut supposer que le gradient de pression transverse dans la couche limite est très faible tandis que le gradient longitudinal est imposé par l'écoulement externe.

- La couche de mélange
  Lorsque deux écoulements de vitesses différentes se rejoignent, comme le montre la figure 6.2, il y a formation d'une zone cisaillée où s'effectue un lissage progressif de la discontinuité de vitesse. Cette zone de faible épaisseur, dite "Couche de mélange" donne également naissance à de grands gradients transverses de vitesse. Son épaisseur augmente lorsque l'on se déplace vers l'aval, sous l'effet de diffusion transverse qu'assure la viscosité.

- Les jets
  le jet est un écoulement cisaillé crée par l'expulsion d'un fluide doté d'une certaine quantité de mouvement dans un fluide au repos. Comme on le voit sur la Figure 6.3-a, une zone de mélange se forme à la frontière du jet et, plus en aval, ces deux zones se rejoignent pour former un profil **établi**. Ce jet peut éventuellement être confiné (Figure 6.3-b) comme dans les injecteurs coaxiaux par exemple.

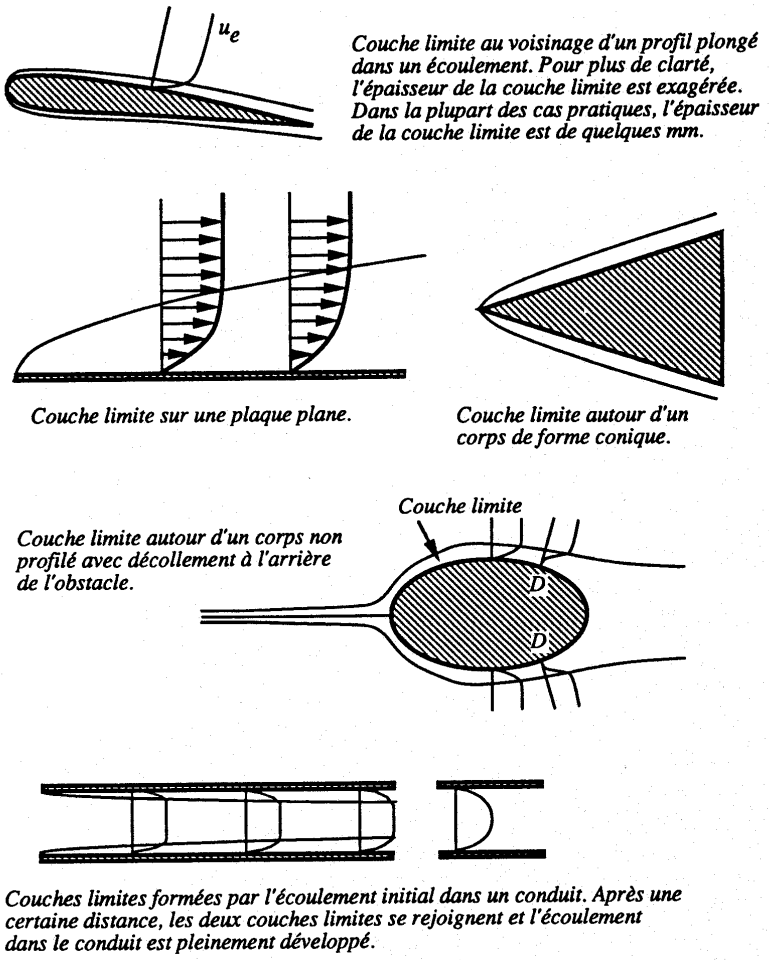


Figure 6.1: Quelques types de couches limites de paroi.

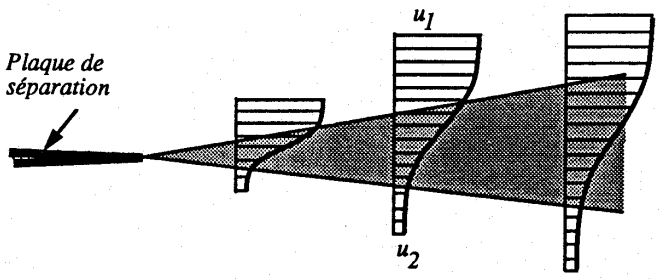


Figure 6.2: Couche de mélange à la confluence de deux écoulements parallèlles de vitesses différentes.

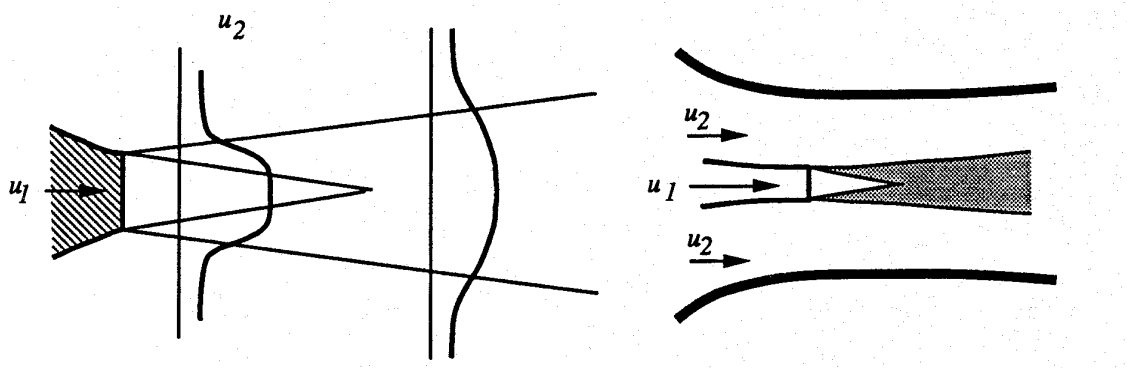


Figure 3a). Jet libre formé en sortie d'une tuyère.

Figure 3b). Jet confiné à l'intérieur d'un éjecteur.

Figure 6.3: Formation d'un jet libre a)libre b)confiné.

- Les sillages
  Lécoulement derrière un obstacle engendre un déficit de vitesse comme le montre la figure 6.4. Cette discontinuité a elle aussi tendance à se lisser lorsque l'on s'éloigne de l'obstacle, toujours sous l'effet de la diffusion transverse assurée par la viscosité. L'ensemble de la zone perturbée constitue le sillage.

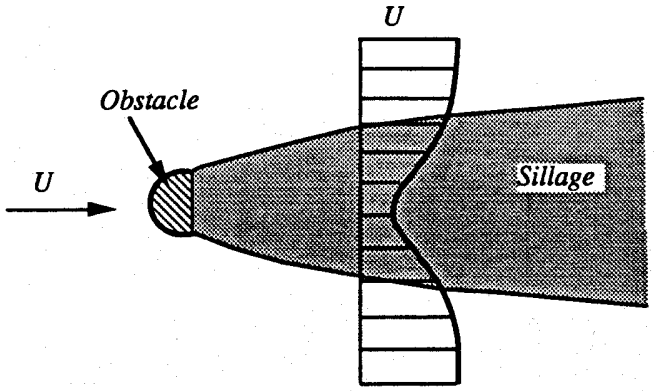


Figure 6.4: Sillage derrière un obstacle: à l'intérieur du sillage, la vitesse passe par un maximum.

6.1.2 Coefficient de frottement sur plaque plane

Dès que l'écoulement aborde la plaque, la couche limite se construit et s'épaissit au fur et à mesure que l'abscisse x mesurée le long de la plaque augmente. L'épaisseur δ de la couche est donc une fonction croissante de x. Ainsi, l'épaisseur qui sépare la paroi de l'écoulement dit " externe " où la vitesse est globalement égale à celle du fluide amont, augmente. De ce fait, la contrainte de frottement diminue avec x, en partant d'une valeur théoriquement infinie en $x = 0$ puisque le gradient de vitesse tend lui aussi vers l'infini. On construit un coefficient de frottement sans dimension, rapport de la contrainte pariétale réelle τ_P à une échelle de contrainte valant $\frac{1}{2}\rho U^2$:

$$C_f = \frac{\tau_P = \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0}}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

On trouve ainsi (calcul hors programme) le coefficient de traînée adimensionnel local (fonction de x) :

$$C_f(x) = 0.664.Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

où Re_x désigne le nombre de Reynolds local: $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$.

Coefficient de trainée: De la contrainte τ_P, on déduit, la trainée D (D pour Drag en anglais, exprimée en Newton) qui, pour une plaque de largeur b et de longueur L s'écrit:

$$D = \int_0^l C_f \frac{1}{2}\rho U^2 b dx$$

On rend cette valeur sans dimension en introduisant un coefficient de trainée C_D défini comme le rapport de la trainée D à $(1/2)\rho U^2 S$ où $S = bL$ désigne la surface de la plaque. On obtient:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} = \frac{\int_0^l C_f \frac{1}{2}\rho U^2 b dx}{\frac{1}{2}\rho U^2 bL} = \frac{0.664 \int_o^l \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} dx}{L}$$

soit:

$$C_D = 1.328 Re_L^{-\frac{1}{2}}$$

Cette loi n'est valable que dans la zone laminaire. Lorsque l'abscisse x augmente, l'écoulement dans la couche limite devient instable puis turbulent (cf. Figure 6.5). La valeur du nombre de Reynolds, construit avec la longueur x comme longueur caractéristique, qui sépare le régime stable du régime instable est appelée *valeur critique*. Pour les écoulements sur plaque plane cette valeur vaut:

$$(Re_x)_c = \frac{Ux}{\nu} \approx 5.10^5$$

A la transition entre la zone laminaire et la zone turbulente, on observe une augmentation brutale de l'épaisseur de la couche limite (figure 6.6) ainsi que de la contrainte pariétale.

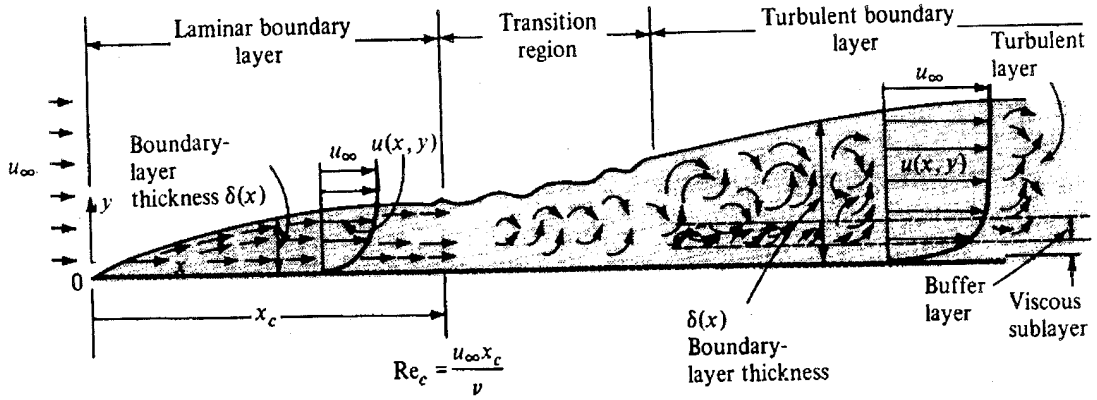


Figure 6.5: Transition entre le réguime laminaire et turbulent dans une couche limite sur plaque plane (d'après Solliec, Cours de l'Ecole des Mines de Nantes).

Pour un écoulement turbulent sur plaque plane, le coefficient de frottement local s'ecrit (Figure 6.7):

$$C_f(x) = 0.0594 Re_x^{-1/5}$$

où C_f est défini, comme dans la zone laminaire par:

$$C_f = \frac{\tau_P}{\frac{1}{2}\rho U_e^2}$$

On en déduit le coefficient de traînée C_D dans cette zone:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} = 0.074 Re_L^{-1/5}$$

Cette formule est valable pour $5.10^5 < Re_x < 10^7$. Pour $Re > 10^7$ on prendra plutôt:

$$C_f = \frac{0.455}{(log_{10} Re_x)^{2.58}}$$

qui colle mieux aux résultats expérimentaux et qu'il faudra intégrer pour déduire la traînée totale D.

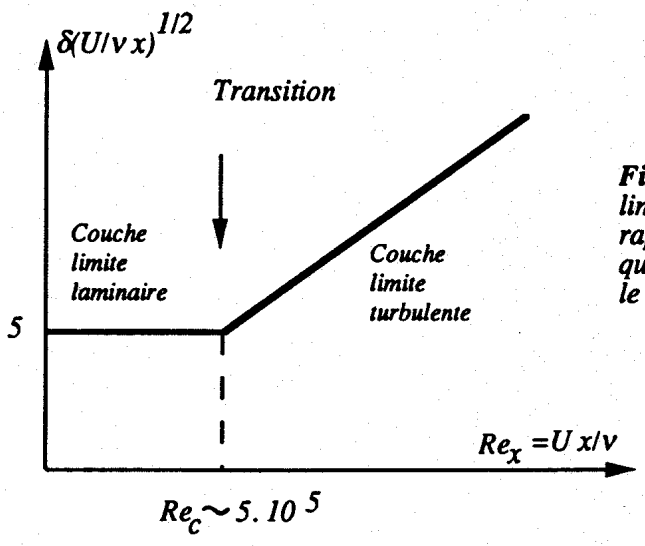


Figure 18. *La transition de la couche limite provoque une augmentation rapide de l'épaisseur de la couche limite que l'on peut observer en considérant le produit* $\delta(U/\nu x)^{1/2}$.

Figure 6.6: Evolution de l'epaisseur d'une couche limite sur plaque plane en fonction du nombre de Reynolds.

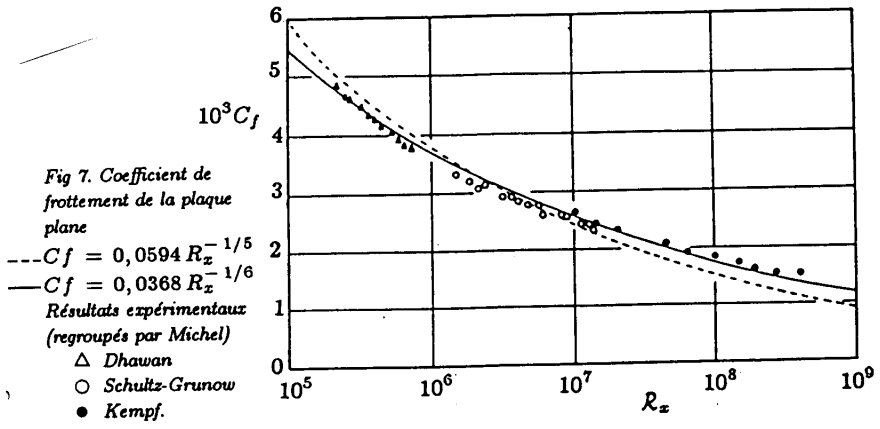


Figure 6.7: Coefficient de frottement local $C_f(x)$ en fonction du nombre de Reynolds local Re_x pour un écoulement turbulent sans gradient de pression sur plaque plane.

6.2 Ecoulement autour d'obstacles

6.2.1 Traînée et portance

Considérons un écoulement suivant un axe Ox (supposé horizontal) s'écoulant autour d'un corps. Appelons Oz la direction normale (verticale dans ce cas). La force de résistance suivant l'axe Ox a déjà été discutée et s 'appelle la *traînée*. Désignons par F_x la force correspondante.
Si l'obstacle n'est pas symétrique par rapport à l'axe Ox, il peut s'en suivre un effort non nul suivant l'axe Oz : désignons par F_z cet effort dénommé *portance*.

Traînée et portance sont les paramètres clés de tout objet volant, et même dans une certaine limite, des paramètres importants de dimensionnements de certaines voitures de courses (une portance excessive amène le véhicule à s'envoler !). Les coefficients de trainée et de portance sont souvent exprimés sous forme adimensionnlle :

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}$$

$$C_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}$$

où S désigne la surface frontale de l'obstacle (projetée suivant Ox).

6.2.2 Décollement des couches limites

Lorsqu'un fluide s'écoulant suivant Ox le long d'une paroi est soumis à un gradient de pression "moteur" c'est-à-dire tel que $\partial p/\partial x < 0$ le fluide n'est pas ralenti et la couche limite n'a pas de difficulté à adhérer à la paroi de l'obstacle qu'elle contourne. Ceci est illustré sur la figure 6.8 qui montre un ensemble"convergent-divergent": dans la partie amont, la contraction de section entraine une diminution de pression(Bernoulli) et génère donc un $grad\ p < 0$.

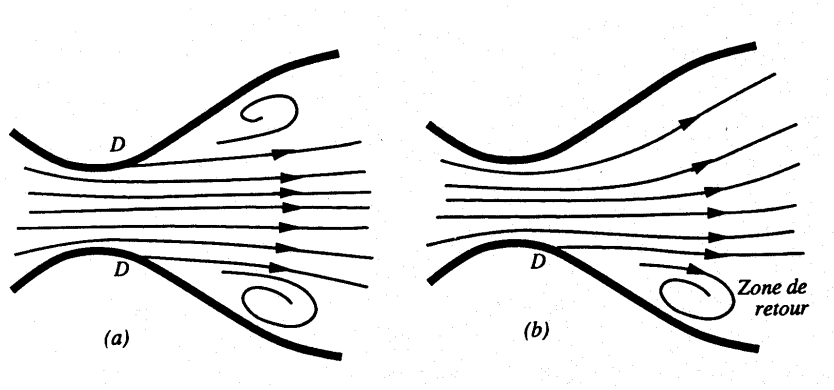


Figure 6.8: Ecoulements décollés dans des conduits fortement divergents: a) décollement symétrique b) asymétrique.

En amont,l'écoulement reste au contact de la paroi. Passé le col, la section augmente et le gradient de pression devient **adverse** ce qui entraine le décollement de la couche limite et la création d'une zone de recirculation. La figure 6.9 montre une vue grossie de la zone de décollement et l'on y voit que le point de décollement est caractérisé par:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad \text{(contrainte =0)}$$

6.2.3 Ecoulement autour d'un cylindre pour divers Re.

Le décollement d'un écoulement s'observe aussi autour d'un cylindre où, au voisinage de $\theta \approx 90$ degrés l'écoulement venant de l'amont décolle pour donner naissance à deux tourbillons "attachés" à l'arrière du cylindre (figure 6.10).

Ceci a lieu tant que le nombre de Reynolds, basé sur le diamètre du cylindre, reste inférieur à $Re \approx 40$. Au dela, la couche limite devient instable et ses oscillations donnent naissance à des tourbillons lachés alternativement de chaque coté du cylindre. A l'aval, on observe une "Allée de tourbillons" encore dénommée "Allée de Karman" (Figure 6.11). Quand Re augmente encore, le sillage devient turbulent et le point de décollement est déplacé vers l'aval. Le nombre de Strouhal

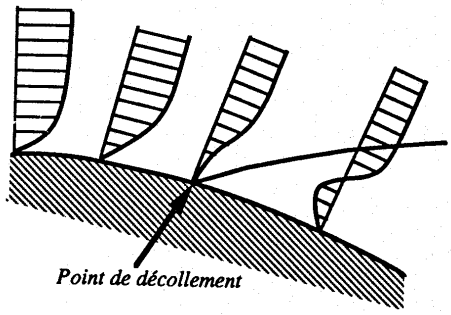


Figure 11. Au point de décollement le profil de vitesse présente une tangente verticale et la contrainte pariétale s'annule.

Figure 6.9: Illustration du décollement d'une couche limite.

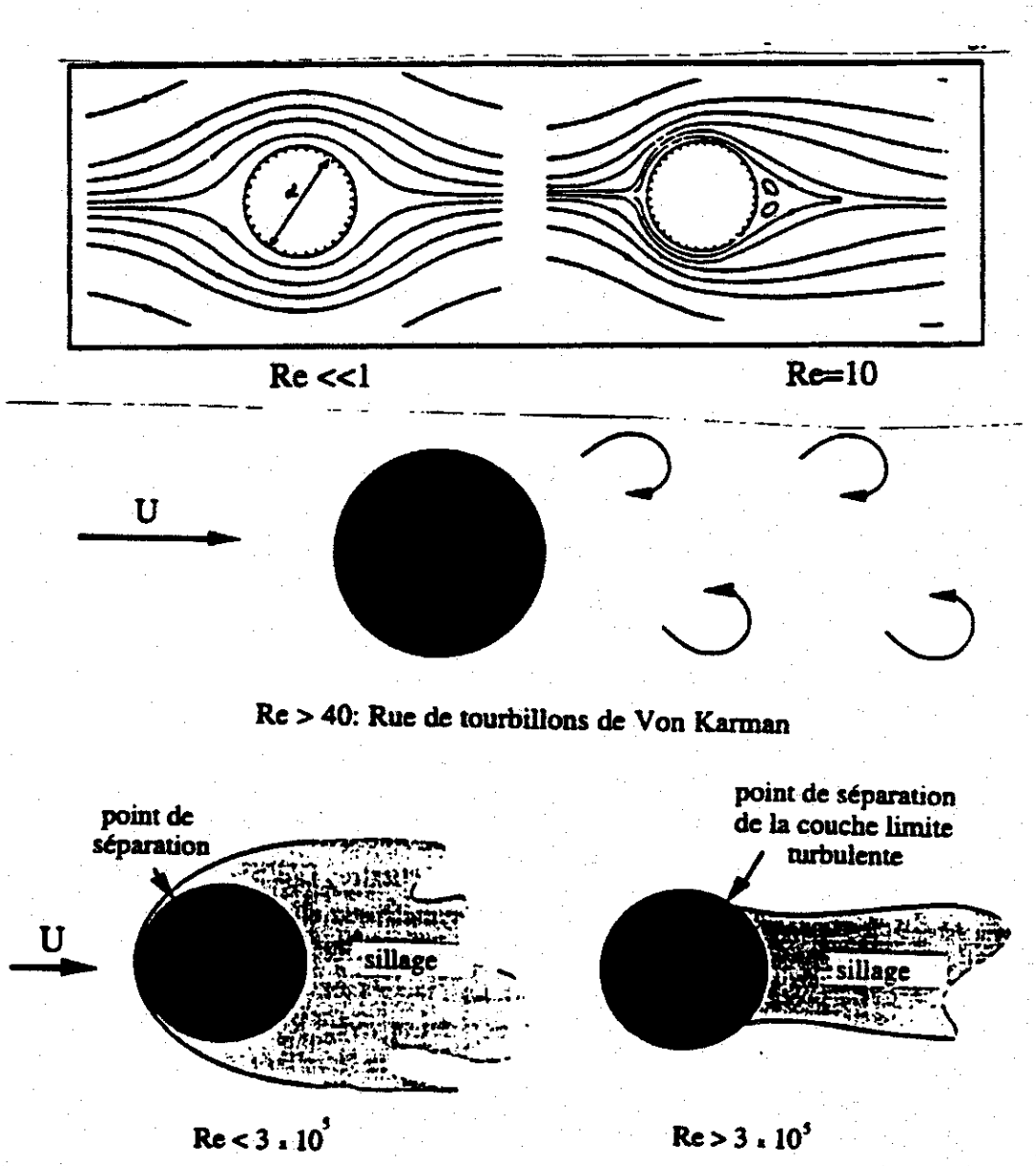


Figure 6.10: Ecoulement autour d'un cylindre.

$S = \frac{f.d}{U}$ caractérise la fréquence adimensionnelle de laché des tourbillons. Les Figures 6.12 et 6.13 montrent l'évolution du nombre de Strouhal S et du coefficient de traînée C_D avec Re.

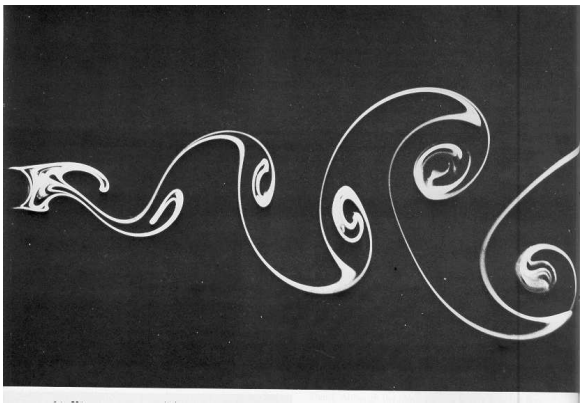


Figure 6.11: Allée de Karman générée par l'écoulement autour d'un cylindre à $Re = 140$ (d'après Van Dyke: An Album of Fluid motion).

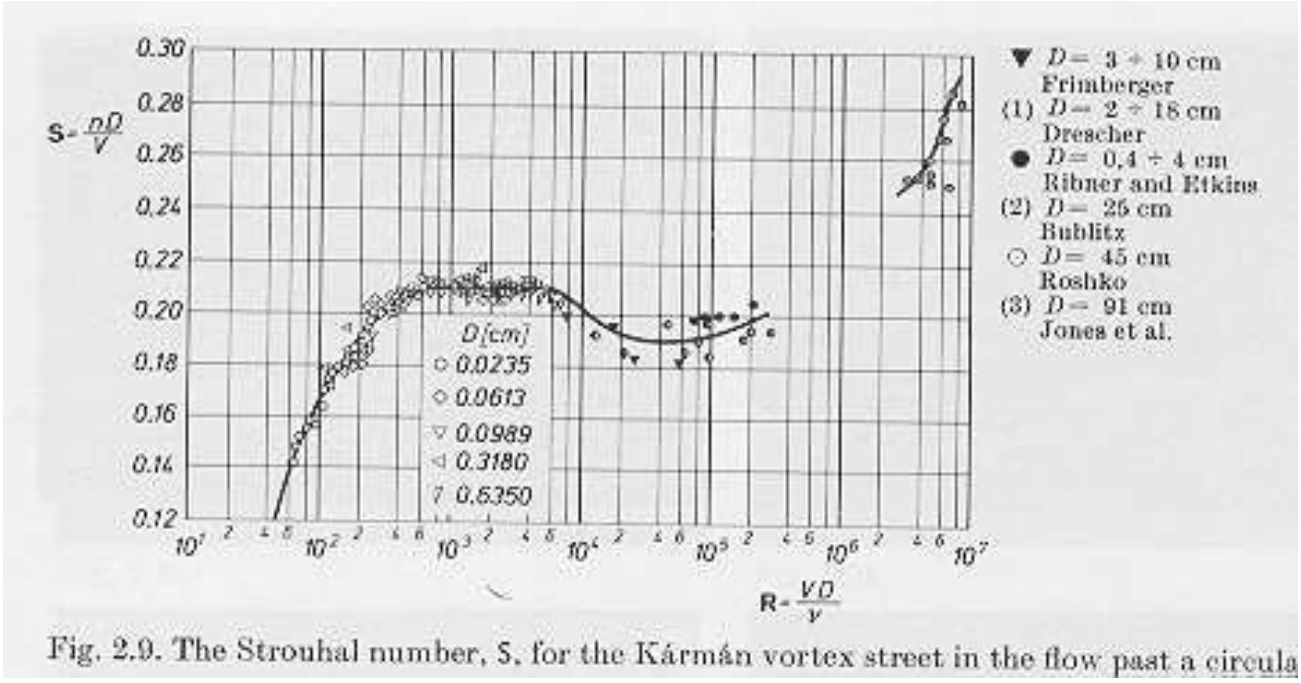


Figure 6.12: Nombre de Strouhal en fonction de Re pour l'écoulement autour d'un cylindre.

6.2.4 Ecoulement autour d'obstacles quelconques

La Figure 6.14 donne les coefficients de frottement d'écoulements autour d'obstacles divers.

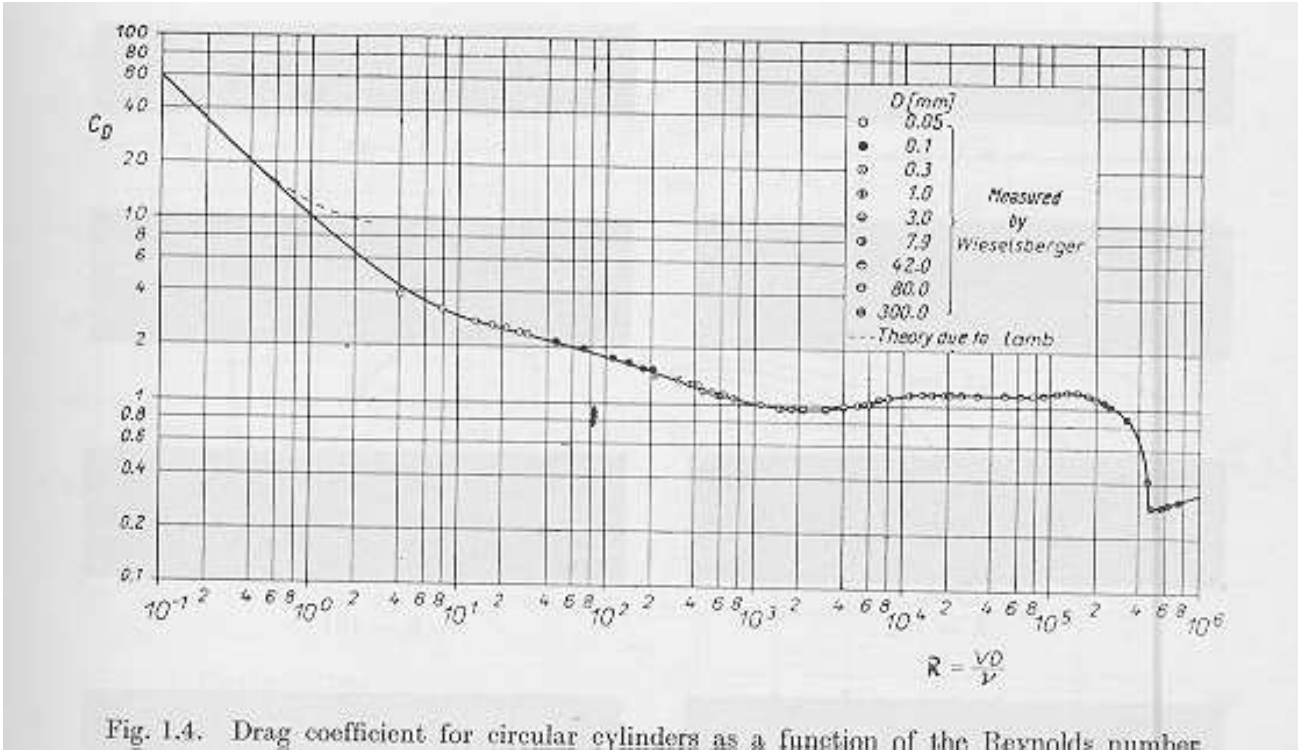


Fig. 1.4. Drag coefficient for circular cylinders as a function of the Reynolds number

Figure 6.13: Coefficient de trainée de l'écoulement autour d'un cylindre.

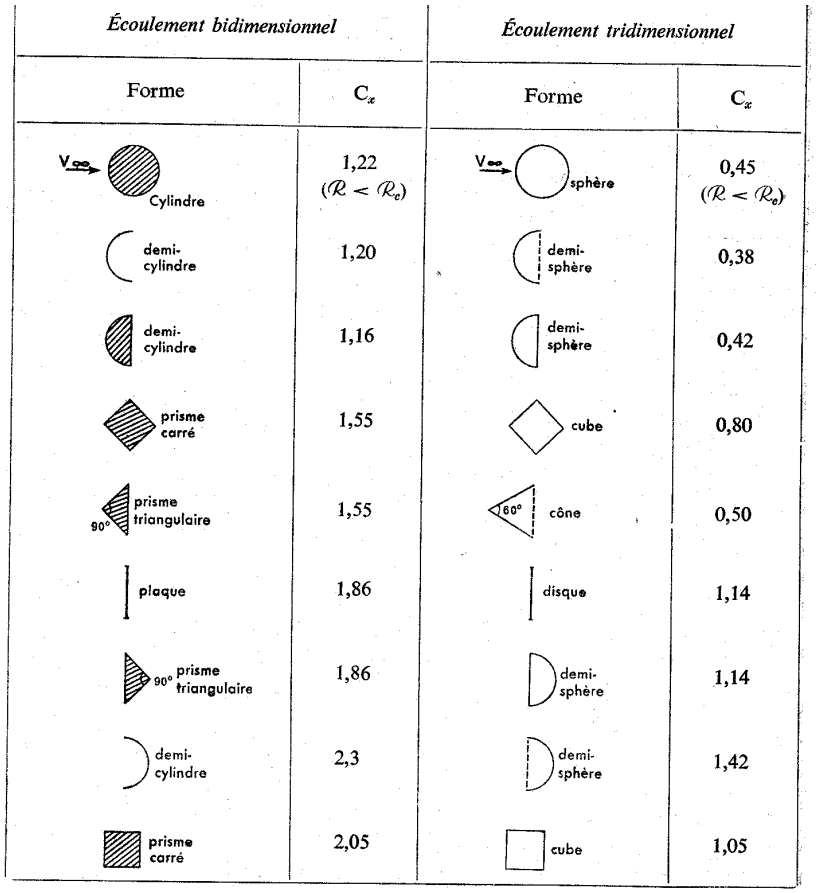


Figure 6.14: Coefficients de trainée pour un écoulement autour d'obstacles divers - (D'après Comolet) $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}$

Chapter 7

Exercices

Hydrostatique

* (Schaum 2.14 p.21): Calculer la pression manométrique en A (en bar) due à la dénivellation du mercure, de densité 13,57 dans le manomètre en U représenté sur la Figure 7.1:

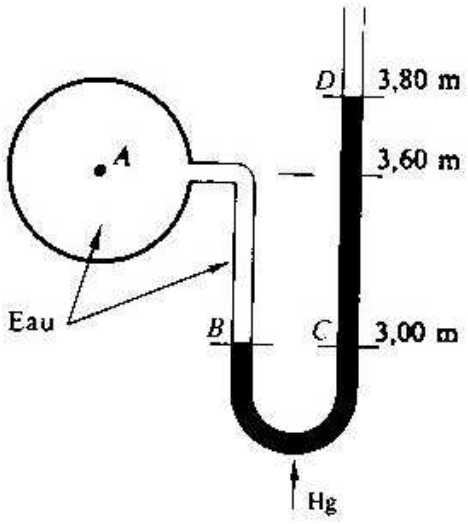


Figure 7.1:

Réponse : $P_A = 1.0058bar$.

* (Schaum 2.26 p.29):Trouver la difference de pression entre A et B dans le montage de la Figure 7.2:
Réponse : $P_A - P_B = 13.3kPa$.

* (Schaum 2.41 p.34) Se reportant à la Figure 7.3 pour quelle valeur marquée au manomètre A la glycérine s'élèverat-elle au niveau B ? Les masses volumiques de l'huile et de la glycérine sont respectivment de 832 et de $1250kg/m^3$.
Réponse : $0.35bar$.

* (Schaum 3.3 p. 38) Calculer la force résultante P due à l'action de l'eau sur la surface rectangulaire de $3m$ x $6m$ représentée sur la Figure 7.4
Réponse : $P = 1235000N$

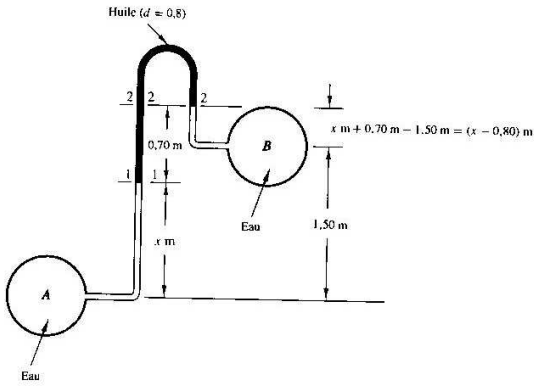


Figure 7.2:

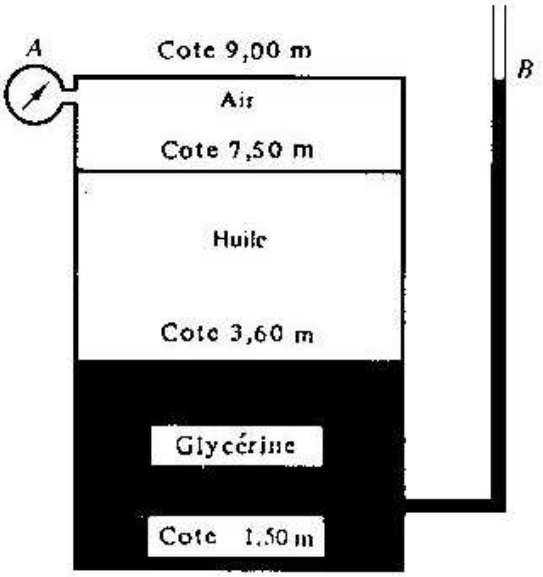


Figure 7.3:

* (Schaum 3.5 p.39) L'eau monte jusqu'au niveau E dans le conduit fixé au réservoir $ABCD$ de la Figure 7.5. En négligeant le poids du réservoir et du conduit (a) déterminer la force résultante agissant sur la surface AB qui a $2.50m$ de large, (b) déterminer la force totale s'exercant sur le fond du réservoir et (c) comparer le poids total de l'eau avec le résultat (b) et expliquer la différence.

Réponse : (a) $P = 230kN$ agissant à $4.77m$ sous le point O. (b) $839kN$; (c) $298kN$.

* (Schaum 3.7 p. 41) Le réservoir de la Figure 7.6contient de l'huile et de l'eau. Trouver la force résultante agissant sur le coté ABC qui a $1.20m$ de large.

* (Schaum 3.12 p. 44) Le cylindre de $2m$ de diamètre de la Figure 7.7 pèse $22.25kN$ et a une longueur de $1.50m$. Déterminer les réactions en A et en B en ne tenant pas compte du frottement.

Réponse : Réaction en A : $23540N$ dirigée vers la droite. Réaction en B : $3760N$ dirigé vers le haut.

* (Douglas 3.7 p.86) Une porte rectangulaire (Figure 7.8) d'épaisseur négligeable et de largeur b sépare deux bassins emplis du même fluide densité ρ. On veut que la porte s'ouvre quand le niveau du bassin de gauche descend en dessous d'une hauteur H par rapport à l'axe de rotation. Le niveau du bassin de droite reste constant à une hauteur y au dessus de l'axe. Exprimer le pds de la porte en fonction de ρ, g, b Y,y et H.

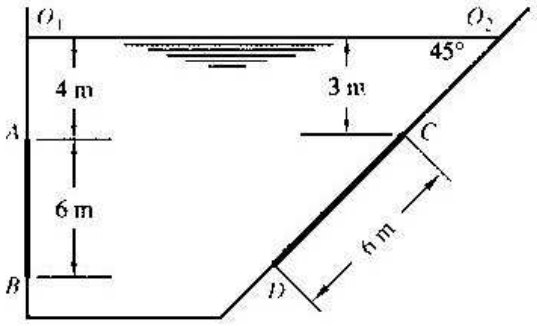


Figure 7.4:

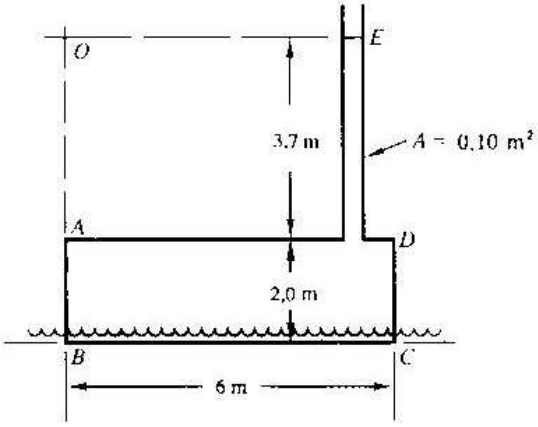


Figure 7.5:

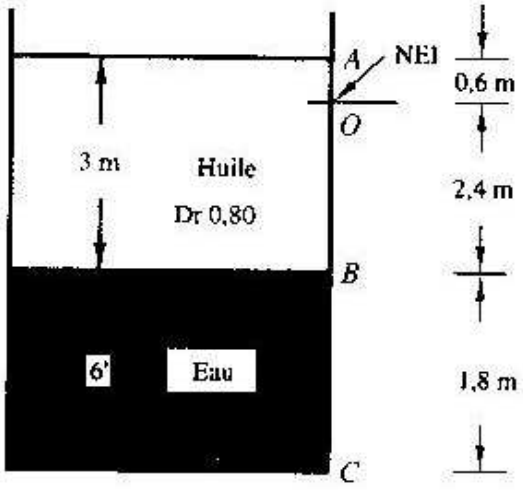


Figure 7.6:

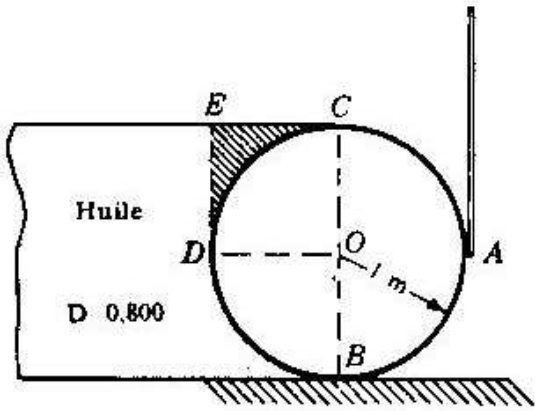


Figure 7.7:

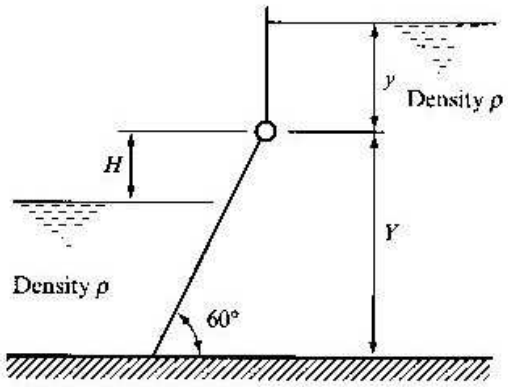


Figure 7.8:

* (Schaum 4.5 p.61) Quelle est la fraction de volume d'un morceau de métal solide de densité 7.25 qui flotte à la surface d'un récipient de mercure de densité 13.57 ? (Figure 7.9)

* (Schaum 4.8 p.62) De combien s'enfonce dans l'eau douce un tronc de $2;40m$ de diamètre et de $4.50m$ de long, de densité 0.425 ? (Figure 7.10)

* (Schaum 4.1 p.63) Un navire, dont les cotés sont verticaux à la hauteur de la ligne de flottaison pèse 4000 tonnes et a un tirant d'eau de $6.70m$ en eau salée ($\rho = 1025kg/m^3$). La décharge de 200 tonnes d'eau de lest ramène le tirant à $6.40m$. Quel serait le tirant d'eau dans l'eau douce ? (Figure 7.11)

* (a)En négligeant l'épaisseur des parois du réservoir de la Figure 7.12, si le réservoir flotte dans la position indiquée, quel est son poids ? (b) si le réservoir est mainenu de sorte que sapartie supérieure soit à $3m$ au dessous du niveau de l'eau, quelle est la force qui s'y exerce (Figure 7.13)?

* (Schaum 4.9 p.63) Une sphère d'aluminium pèse dans l'air $0.258N$. Son poids apparent dans l'eau n'est que de $0.100N$. Montrer qu'elle est creuse et calculer son volume (masse volumique de l'aluminium $2580kg/m^3$).(Rep.: V=58 cm^3).

Application du théorème de Bernoulli, pertes de charge

* Déversoir : un déversoir est un dispositif permettant de mesurer le débit qui s'écoule dans un canal à surface libre : on insère dans le courant une plaque que l'écoulement doit donc surmonter pour s'écouler. Dans cette plaque on dispose une fente de forme variable, ici triangulaire (cf.figure 7.14) et on mesure la hauteur h qui est fonction du débit. Exprimer le débit volumique en fonction de h et de θ.
Réponse : $Q_V = 2\sqrt{2g}\ tg(\theta/2)\left(\frac{4}{15}h^{5/2}\right)$

* Conduite horizontale avec Venturi : un circuit hydraulique horizontal a les dimensions indiquées sur la Figure 7.15. Il

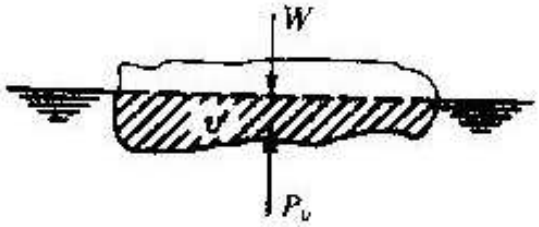


Figure 7.9:

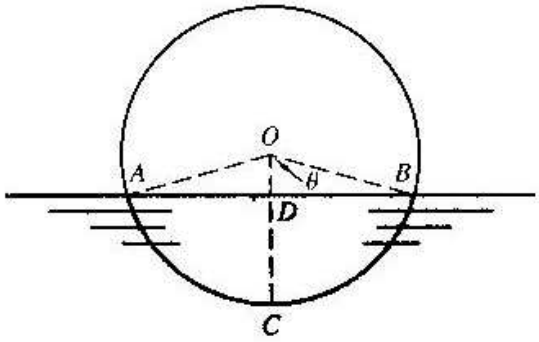


Figure 7.10:

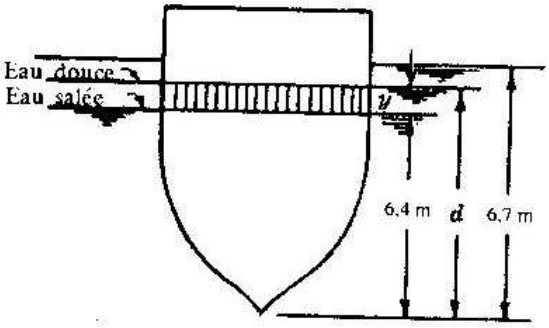


Figure 7.11:

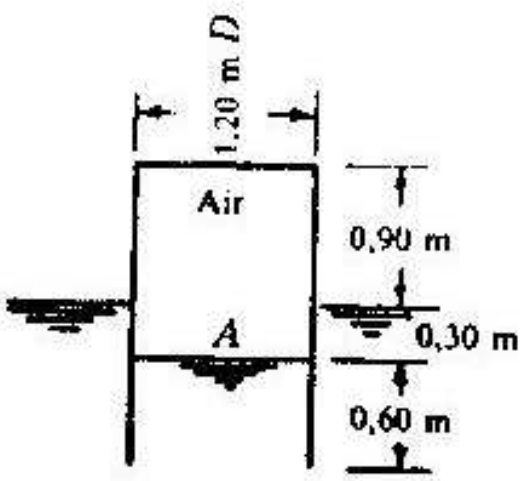


Figure 7.12:

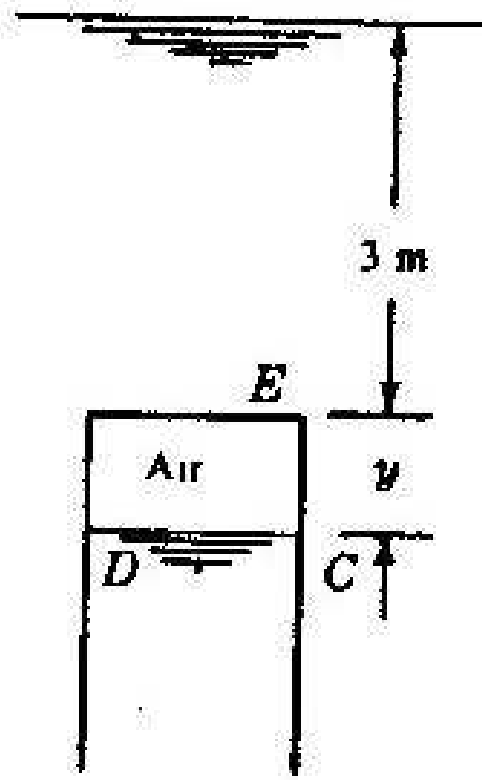


Figure 7.13:

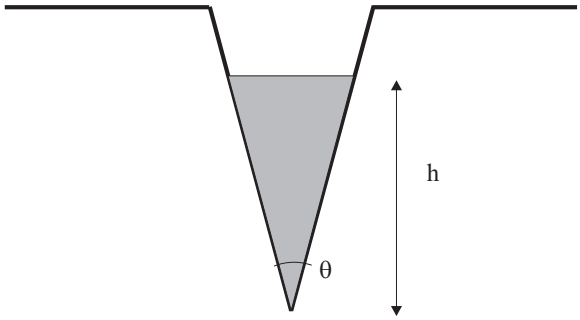


Figure 7.14: Mesure d'un débit à l'aide d'un déversoir

comporte un Venturi, une prise de pression statique et une prise de pression double. Ces divers appareils sont reliés à des manomètres à mercure. Les tubes de liaison aux manomètres sont remplis d'eau. Masse volumique du mercure $13600kg/m^3$.
On donne : pression absolue en O : $P_0 = 1.5bar$. Pression atmosphérique : $P_a = 1bar$, $z = 1m$.
1 - Sachant que la dénivellation $h_V = 40mm$ calculer le débit volumique dans la conduite
2 Calculer h_S
3 Calculer h_d.

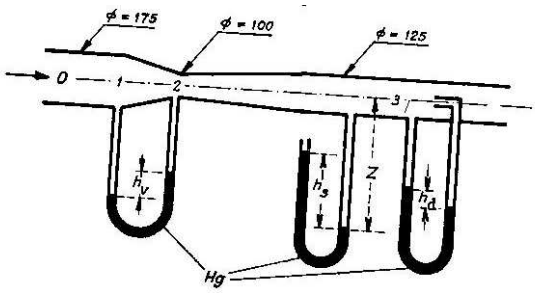


Figure 7.15: Mesure d'un débit à l'aide d'un Venturi

* Dans le circuit hydraulique de la Figure 7.16 on donne:
$z_1 = 5m$, $z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = 0$, $D_2 = D_4 = 75mm$, $D_5 = 150mm$ $h = 10cmdemercure$, $y = 1m$.
Coefficients de perte de charge : $\zeta_2 = 0.5$, $\zeta_3 = 10$.

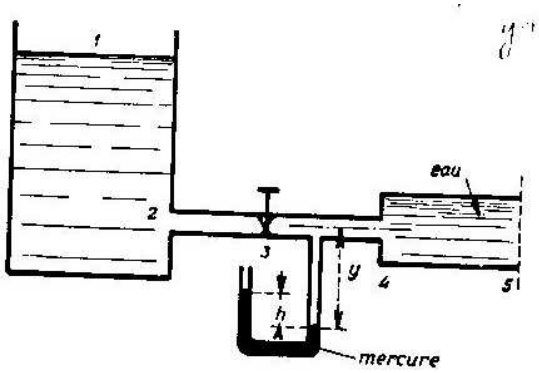


Figure 7.16:

Calculer :
1- Le débit volumique
2- La pression effective à l'aval des points $2, 3, 4$.

* (Schaum 8.23 p.157) De l'huile circule du réservoir A à travers $150m$ de tuyau neuf de fonte asphaltée de $150mm$ de diamètre jusqu'au point B de côte $30m$, comme le montre la Figure 7.17. Quelle devra être la pression en A pour que le débit de l'huile soit de $13l/s$ (densité $= 0.84$ et $\nu = 2.1\ 10^{-6}m^2/s$)? Utiliser $\epsilon = 0.12mm$.

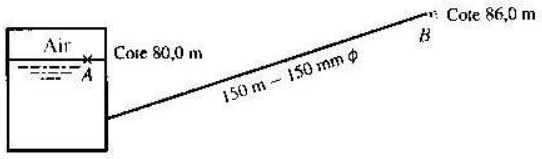


Figure 7.17:

Machines hydrauliques

* (Morel-Laborde p.172) Un laboratoire d'hydraulique dispose d'un banc où un groupe électro-pompe P alimente, par l'intermédiaire de conduite en acier galvanisé, une turbine Pelton couplée à un alternateur (cf. Figure 7.18) . La réserve d'eau se trouve sous la dalle du laboratoire. Pour le débit $Q_v = 2.5l/s$ les caractéristiques de l'installation sont les suivantes :

- Groupe electro-pompe P :
  - rendement de la pompe $\eta_P = 79\%$
  - rendement du moteur : $\eta_m = 95\%$

- Groupe turbine-alternateur T
  - rendement de la turbine : $\eta_T = 82\%$
  - rendement de l'alternateur : $\eta_a = 91\%$
  -

- Canalisations : diamètre nominal $40mm$ en acier galvanisé $\epsilon = 0.3mm$
  $DC_1 = C_4G = 1m$, $C_2C_3 = 1m$, $BC_2 = 51m$
  C_1 et C_4 coudes 90° $R_0 = 2DN$
  C_2 et C_3 coudes 90° $R_0 = 1DN$

- Vanne à opercule totalement ouverte

- Sur le manomètre M_{a1} on lit une pression effective de $3.2bar$.

1- Donner la puissance électrique fournie au groupe électro-pompe
2- Donner la puissance électrique fournie par le groupe turbine-alternateur
3- Quel est le rendement η_i de l'installation ?
4- Quelle pression lira-t-on sur le manomètre M_{a2}
Pour l'eau :$\rho = 1000kg/m^3$; $\nu = 10^{-6}m^2/s$.
Réponse : 1 : $P_{e1} = 1100W$; 2- $P_{e2} = 438W$; 3- $\eta_i = 40\%$; 4- $P_{Ma2} = 2.3bar$.

* (Morel p. 158-159) Point de fonctionnement d'une turbine Pelton

On veut se servir de l'eau du barrage de la Figure 7.19 pour produire de l'électricité. Pour cela on installe au bout de la conduite gravitaire une turbine Pelton couplée à un alternateur dont les caractéristiques sont précisées dans le tableau suivant:

H (m)	480	415	360	278	240	184	130	100
Q_V (l/s)	274	260	240	200	177	140	100	72
$\eta(\%)$	-	73	79.5	85	84	79	71	-

Déterminer graphiquement le point de fonctionnement de la turbine
Réponse : $H_n = 333m$; $Q_V = 228l/s$; $\eta_T = 82\%$.

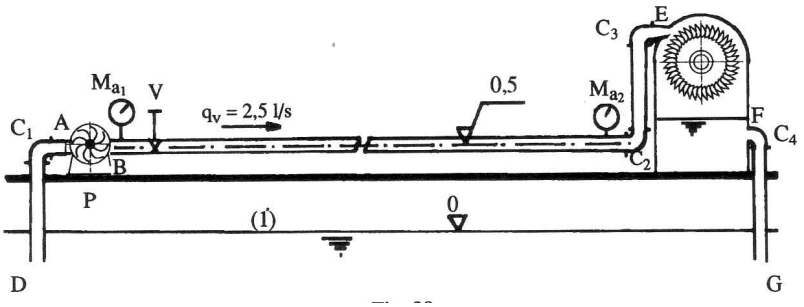


Figure 7.18:

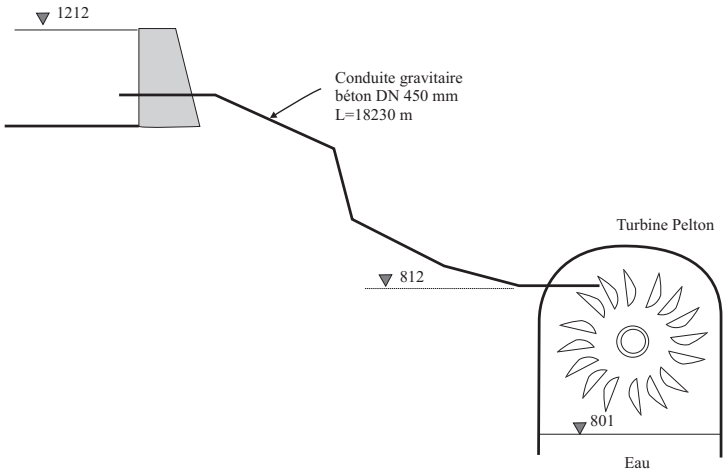


Figure 7.19: Turbine Pelton

* (Morel p. 160) Point de fonctionnement d'une pompe avec pertes de charge à l'aspiration (Figure 7.20). La caractéristique de la pompe est donnée Figure 7.21).

1- Donner les points de fonctionnement de la pompe 2- Calculer la pression à l'entrée de la pompe

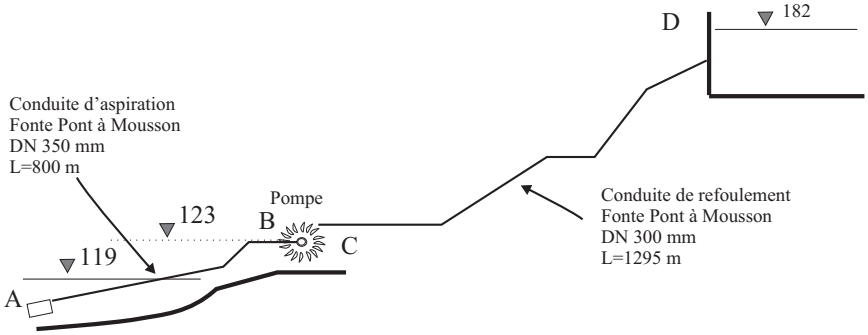


Figure 7.20: Pompe avec perte de charge à l'aspiration

Continuité

* Montrer que le champ de vitesse bidimensionnel défini en coordonnées cartésiennes par $U_x = kx$; $U_y = ky$ satisfait l'équation de continuité.

Même question en coordonnées cylindriques pour le champ de vitesse $1D$ défini par : $U_\theta = Ar + \frac{B}{r}$.

La solution de l'écoulement d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de rayon a s'écrit :

$$U_r = U_0 cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$U_\theta = U_0 sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

où U_0 désigne la vitesse uniforme du fluide à l'infini. Vérifier que cette solution satisfait l'équation de continuité.

On appelle source une singularité qui génère un débit de fluide. En coordonnées cylindriques une source produit un écoulement radial dont les coordonnées sont :

$$U_r = \frac{Q}{2\pi r}$$
$$U_\theta = U_z = 0$$

Montrer que cette solution satisfait l'équation de continuité.

* Soit le champ de vitesse défini par :

$$U_x = x^2 + y + z$$
$$U_y = x - xy + z$$
$$U_z = x + y - xz$$

Vérifier que ce champ de vitesse satisfait l'équation de continuité.

* Soit un écoulement permanent dont le champ de vitesse est défini par :

$$U_x = x + y$$

$$U_y = -x - y$$

$$U_z = 0$$

Vérifier que cet écoulement se fait sans accélération, c.a.d. que $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$.

* Le champ de vitesse le long de la ligne centrale d'un convergent de longueur L est donné par :

$$U_x = 2t \left(1 - 0.5\frac{x}{L}\right)$$

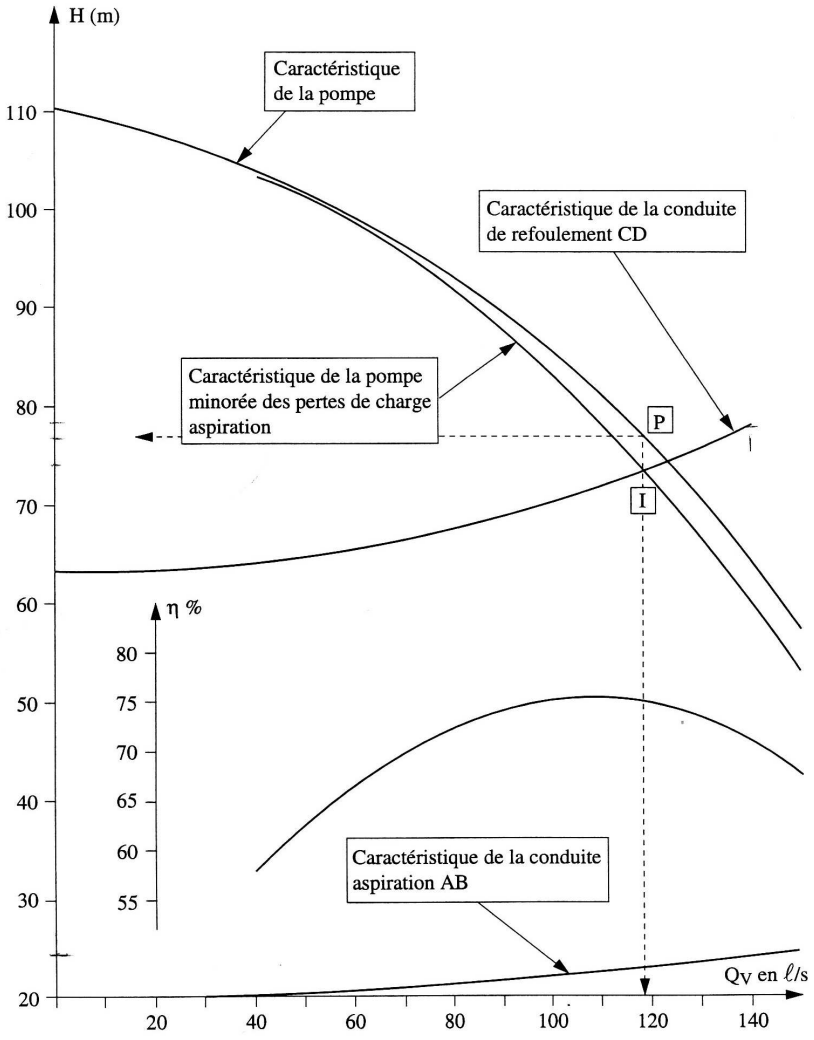


Figure 7.21: Caractéristique de la pompe

où U_x est la vitesse en m/s , t le temps en secondes mesuré depuis le début de la mise en mouvement du fluide et x la distance depuis l'entrée du convergent. Trouver l'accélération convective (Lagrangienne) et l'accélération locale (Eulérienne) pour : $t = 3s$; $x = \frac{L}{2}$ et $L = 0.8m$.

* Le champ de vitesse bidimensionnel suivant satisfait il la condition de continuité ?: $u = U(x^3 + xy^2)$ et $v = U(y^3 + yx^2)$

* Même question pour le champ suivant : a) $u = 10xt$ et $v = -10yt$ ($\rho = Cste$) b) $u = U\,(y/\delta)^{1/7}$ et $v = 0$ ($\rho = Cste$)

Théorème de quantité de mouvement

* Un tronçon de tuyau coudé se rétrécit d'un diamètre $D_1 = 500mm$ en entrée à un diamètre $D_2 = 250mm$ en sortie et procure une déviation de 45° à l'écoulement. Des mesures de pression indiquent $P_1 = 40kPa$ en entrée et $P_2 = 23kPa$ en sortie. Calculer l'intensité et la direction de la force résultante sur la conduite lorsque le fluide est de l'huile ($\rho = 850kg/m^3$) s'écoulant avec un débit de $0.45m^3/s$. La conduite est horizontale.
Réponse : $R_x = 5.454.10^3N$; $R_y = 3.277.10^3N$; angle $=31^o$.

* Un jet d'eau de diamètre $d = 50mm$ s'écoule à la vitesse $v = 4.9m/s$ d'un orifice situé dans la paroi verticale d'un réservoir dont le niveau est maintenu à $1.5m$ au dessus du trou (Figure 7.22). Calculer la réaction du jet sur le réservoir a) lorsque le réservoir est immobile b) lorsque le réservoir se déplace en direction opposée au jet avec une vitesse constante de $u = 1.2m/s$.

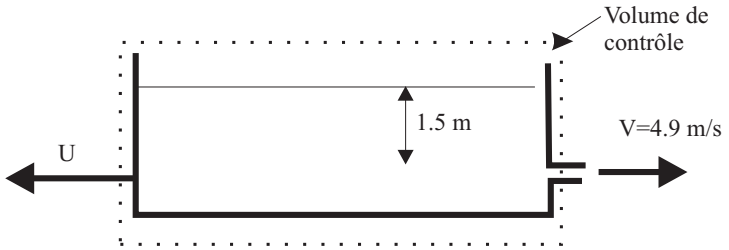


Figure 7.22: Effort sur un chariot

Réponse : $47.14N$ dans les 2 cas.

* Un moteur-fusée consomme $1kg$ de carburant pour $40kg$ d'air traversant le moteur. La consommation de carburant est de $1.1kg/s$ quand l'avion se déplace dans de l'air au repos à la vitesse de $200m/s$. La vitesse des gaz issus du moteur à la pression atmosphérique est de $700m/s$ (vitesse relative par rapport au moteur). Calculer a)la poussée de l'engin, b) la puissance c) le rendement.
Réponse : a) $22.77kN$; b) $4554kW$; c) 44.7%.

* La Figure 7.23 montre la coupe méridienne d'un éjecteur traversé par de l'air ($\rho = 1.2kg/m^3$) débouchant dans l'atmosphère à travers une fente annulaire à la vitesse de $30m/s$. Trouver la force s'exerçant sur la conduite quand la pression en A est inférieure de $2065Pa$ à la pression de sortie.

Réponse : $720.7N$.

Navier-Stokes

* En coordonnées cartésiennes, écrire les équations de Navier-Stokes d'un fluide circulant entre deux plans parallèles horizontaux avec les hypothèses suivantes (cf.figure 7.24):

- écoulement permanent
- écoulement établi
- écoulement $1D$
- fluide Newtonien incompresible

* Idem en coordonnées cylindriques pour l'écoulement dans un tube (cf.figure 7.25):

* Idem en écoulement tournant (cf.figure 7.26):

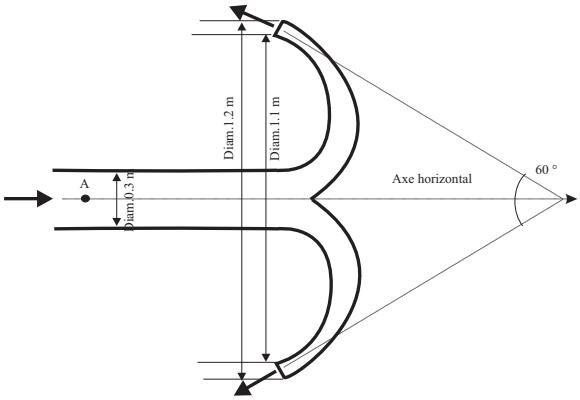


Figure 7.23: Effort sur un éjecteur

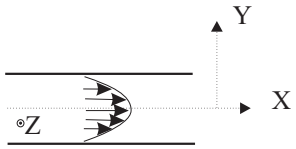


Figure 7.24:

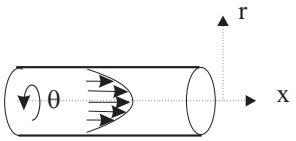


Figure 7.25:

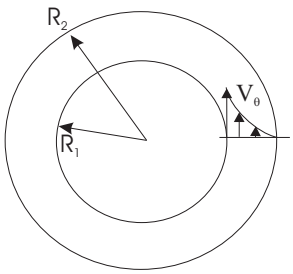


Figure 7.26:

* On considère l'écoulement laminaire d'un fluide de viscosité dynamique $\mu = 0.9Pa.s$ et de densité $\rho = 1260kg/m^3$ entre deux parois d'extension infinie, séparées de $10mm$ et inclinées de 45° par rapport à l'horizontale. La plaque supérieure se déplace se déplace à $1.5m/s$ dans la direction opposée à l'écoulement. La plaque inférieure est au repos. Des jauges de pression installée en 2 points distants de $1m$ verticalement enregistrent des pressions de $250kN.m^{-2}$ et $80kN.m^{-2}$. Déterminer le profil de vitesse et de contrainte entre les plaques ainsi que le maximum de vitesse et la contrainte sur la plaque supérieure.

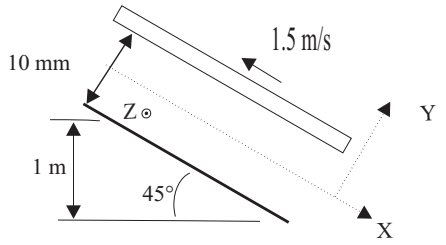


Figure 7.27: Ecoulement laminaire entre plaques parallèles.

Réponse : $U_x = 566.4\ y - 71.64.10^3\ y^2$; $\tau_y = 509.76 - 128.95.10^3\ y$; $U_{max} = 3.36m/s$; $\tau_P = 0.78kN.m^{-2}$.

* On pompe de la glycérine de viscosité $0.9Pa.s$ et de densité $1260\ kg/m^3$ dans un tube horizontal de $6.5m$ et de diamètre $d = 0.01m$. Le débit vaut $Q = 1.8\ l/mn$. Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement et déterminer s'il est laminaire ou turbulent. Calculer la perte de charge. Calculer aussi le débit maximum possible en régime laminaire.
Réponse : $\Delta P = 715kN/m^2$; $Q_{crit} = 112l/mn$.

* Fluides non-newtoniens (Guiffant p. 69) : certains fluides, dits de Bingham (cf. cours) comme des peintures ou même de la boue ont la loi de comportement suivante :

$$\tau < \tau_C : \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\tau > \tau_C : \tau = \tau_C + \alpha \frac{dv}{dr} = 0$$

En deçà d'une certaine contrainte τ_C ces fluides se comportent donc comme des solides d'où leur nom de fluide à seuil.
Trouver le profil de vitesse d'un fluide de ce type s'écoulant dans une conduite cylindrique de rayon R en régime établi et permanent sous l'effet d'un gradient de pression que l'on notera G. Exprimer le débit volumique Q en fonction de G, R, α et τ_C.
Réponse : de $r = 0$ à $r = \frac{2\tau_C}{G}$: $U_z(r) = Cste$; pour $r > \frac{2\tau_C}{G}$ alors $U_z(r) = \frac{G}{4\alpha}(r^2 R^2) - \frac{\tau_C}{\alpha}(r - R)$

Formulaire

Gradient d'un scalaire en coordonnées cylindriques (r, θ, z):

$$\vec{grad}\ f \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{r\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$$

Divergence d'un vecteur en coordonnées cartésiennes: $div\vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Divergence d'un vecteur en coordonnées cylindriques: $div\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Continuité en cartésien :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0$$

Continuité en cylindrique:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$
Equations de Navier Stokes en coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Equations de Navier Stokes en coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_r}{\partial r}) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Contraintes visqueuses dans un fluide newtonien en coordonnées cartésiennes:

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right]$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]$$

Contraintes visqueuses dans un fluide newtonien en coordonnées cylindriques:

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} (\frac{v_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$$

Bibliographie

Plusieurs des figures de ce document sont tirées des ouvrages suivants qui pourront être consultés avec intérêt.

Comolet : Mécanique expérimentale des Fluides, Tome II: Dynamique des Fluides réels. Editions Masson.

Solliec C. : Introduction à la Mécanique des Fluides : Cours de l'Ecole des Mines de Nantes.

IDELSIC: Mémento des pertes de charge.

Livres d'exercices :

Jacques Dufaux, Gérard Guiffant: Mécanique des Fluides,II: fluides en situation réelle, Diderot Editeur, Arts et Sciences, 1998.

Michel Morel: Exercices de mécanique des Fluides, tome 2: turbomachines, Eyrolles.

Série Schaum: Mécanique des Fluides et hydraulique, Mc Graw hill.

Michel Morel, Jean-Pierre Laborde: Exercices de Mécanique des Fluides, Eyrolles.

R. Ouziaux, J. Perrier: Mécanique des Fluides Appliquée, Dunod.